Лекция 16. ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

В 16-ой лекции обсуждаются: Гравитационное поле Земли. Гравитационный потенциал. Гравитационное поле планеты. Потенциал тяжести. Фигуры равновесия небесных тел. Гравитационные аномалии и строение Земли. Приливы.

Гравитационное поле планеты.

Все планеты Солнечной системы имеют форму, близкую к сферической. Поэтому, гравитационное поле шара можно рассматривать, как первое приближение к гравитационному полю планеты. Во втором приближении можно учесть тот факт, что некоторые планеты, в том числе и Земля, гораздо лучше могут быть представлены эллипсоидом вращения, чем шаром. В третьем приближении мы можем учесть и некоторые особенности в распределении масс внутри планеты и т.д. Короче говоря, гравитационное поле планеты обычно представляют рядом по шаровым функциям. В зависимости от решаемой задачи, предъявляются разные требования к детальности исходных данных, к числу членов разложения и к числу исходных параметров.

Итак, будем считать, что наша фиксированная точка P, в которой нам необходимо получить гравитационный потенциал планеты, - внешняя. Снова, как и в приведенных выше формулах, будем считать, что вектор r определяет координаты фиксированной точки P, а абсолютная величина этого вектора - расстояние точки P от начала координат. Радиус-вектор элемента массы dm мы снова будем обозначать буквой r'. Расстояние между фиксированной точкой P и элементом массы dm – буквой ρ. Интегрирование по объему тела планеты мы будем помечать нижним пределом T. Запишем гравитационный потенциал планеты в виде интеграла:

$$V(P) = G\int_T \frac{dm}{\rho} = G\int_T \frac{dm}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr'\cos\varphi}}.$$

В задачах небесной механики часто используются следующие упрощения представления гравитационного потенциала, в предположении, что

- начало координат совпадает с центром масс,
- направления осей параллельны главным осям инерции,
- фигура планеты - тело вращения.

При этих предположениях координаты центра масс и произведения инерции равны нулю, а $A = B$. Выберем декартову систему координат следующим образом: ось Oz совпадает с осью вращения фигуры, а оси Ox и Oy лежат в экваториальной плоскости. Тогда

$$I = A(l^2 + m^2) + Cn^2.$$

Однако, $l^2 + m^2 + n^2 = 1$, поэтому $I = A + (C - A)n^2$. Подставляя это выражение в формулу для шаровой функции второй степени, получим:

$$V_2 = \frac{G}{2r^3}(C - A)(1 - 3n^2).$$

Как мы видели, величина n равна косинусу угла между осью вращения планеты и направлением на точку P. Обозначим этот угол греческой буквой θ, таким образом, $n = \cos\theta$,

$$V_2 = \frac{G}{2r^3}(C - A)(1 - 3\cos^2\theta).$$

По определению полиномов Лежандра, имеем:

$$1/2(1 - 3\cos^2\theta) = P_2(\cos\theta),$$

поэтому

$$V(\cos\theta) \approx \frac{GM}{r}\left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n \left(\frac{a}{r}\right)^n P_n(\cos\theta)\right)$$

$$V_2 = \frac{G}{r^3}(C - A)P_2(\cos\theta).$$

Если ограничиться только этими членами разложения, то гравитационный потенциал планеты можно записать в виде:

$$V(\cos\theta) \approx \frac{GM}{r}\left(1 - \frac{C - A}{r^2 M} P_2(\cos\theta)\right). \qquad (1)$$

Формула (1) показывает, что напряженность гравитационного поля в точке P зависит не только от сферических координат этой точки: расстояния r и полярного расстояния (или широты) θ, но и от отличия моментов инерции около полярной и экваториальных осей. В качестве фундаментальной постоянной поля планеты берут не разность $C - A$, которая зависит от массы и размеров планеты, а безразмерную величину $J_2 = (C - A)/Ma^2$.

Теперь вместо формулы (1) можно записать:

$$V(\cos\theta) \approx \frac{GM}{r}\left(1 - J_2\left(\frac{a}{r}\right)^2 P_2(\cos\theta)\right). \qquad (2)$$

Принимая во внимание другие члены разложения потенциала, но сохраняя главное условие - внутреннее строение планеты соответствует телу вращения - мы можем получить формулу для гравитационного потенциала, содержащую полиномы Лежандра более высоких степеней:

$$V(\cos\theta) \approx \frac{GM}{r}\left(1 - \sum_{n=2}^{\infty} J_n\left(\frac{a}{r}\right)^n P_n(\cos\theta)\right). \qquad (3)$$

Коэффициенты разложения GM и J_2 относятся к *фундаментальным постоянным астрономии.*

В качестве характеристики планеты используют также *безразмерный момент инерции*, который определяется следующим образом: $I^* = C/Ma^2$. Эта величина малая, если почти вся масса планеты сосредоточена в ее центре, она равна 0.4, если планета - однородный шар. Реально $0.0 < I^* < 0.4$. Любопытно, что американский ученый Экхард для Луны определил $I^* > 0.4$, что означает Луна внутри пустая! Более поздние определения безразмерного момента инерции Луны установили, что он равен 0.391, что указывает на ее однородность, но никаких противоречий с установившимися взглядами на строение планет нет. Еще одна фундаментальная постоянная, также связанная с моментами инерции, - постоянная прецессии $H = (C - A)/C$ играет важную роль в теории вращения планеты.

В заключении раздела приведем численные значения фундаментальных постоянных для некоторых планет и Луны.

Фундаментальные постоянные планет			
Планеты	GM, *км*^{3} с$^{-2}$	I^*	J_2
Земля	398600,5±0,3	0,332	0.001082645
Меркурий	22032±0,324		
Венера	324859,6±0,5	0,332	0,00000597
Марс	42828,3±0,1	0,377	0,0008746
Юпитер	126687000±500	0,200	0,022060
Сатурн	37938000±200	0,220	0,025010
Уран	5786700±1500	0,230	
Нептун	6859000±8000	0,290	

Плутон	900±300		
Луна	4902,63±0,07	0,391	0,00009152

Реально гравитационное поле во внешнем пространстве зависит не только от полярного расстояния или широты точки *P*, но и от ее долготы - от угла между плоскостью меридиана, в которой лежит точка *P*, и плоскостью нулевого меридиана. Для Земли - это гринвичский меридиан. Пусть φ - широта, а λ - долгота точки *P*. Учитывая, что $\varphi = \pi/2-\theta$, в приведенных формулах функцию $\cos\theta$, которая входит в качестве аргумента для полиномов Лежандра, мы должны заменить на $\sin\varphi$. Не останавливаясь подробно на выводе формулы разложения гравитационного потенциала в ряд по шаровым функциям, приведем готовый результат:

$$V(x,y,z) = \frac{GM}{r}\left(1-\sum_{k=1}^{\infty} J_{2k}\left(\frac{a}{r}\right)^{2k} P_{2k}(\sin\varphi)\right)$$

$$V(\varphi,\lambda,r) = \frac{GM}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\left(\frac{a}{r}\right)^{n}(C_{mn}\cos m\lambda + S\sin m\lambda)P_n^m(\sin\varphi). \qquad (4)$$

Функции $R_{mn}(\varphi,\lambda) = \cos m\lambda P_n^m(\sin\varphi)$ и $S_{mn}(\varphi,\lambda) = \sin m\lambda P_n^m(\sin\varphi)$ называются *сферическими*, так как значения их зависят только от положения точки на сфере (заданы широта и долгота). Параметры *n* и *m* соответственно называются степенью и порядком отдельной *сферической гармоники*. Функция $P_n^m(\sin\varphi)$ называется *присоединенной (ассоциативной) функцией Лежандра*. Она определяется через полиномы Лежандра следующим образом:

$$P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}}\frac{d^m P_n(x)}{dx^m}. \qquad (5)$$

Обратим внимание на внутреннюю сумму в формуле (5). Ее верхний предел равен *n*, так как при $m > n$ порядок производной *m* в формуле (5) будет больше *степени* полинома *n* и все соответствующие члены будут равны нулю.

Гармоники называются *зональными*, если их значения изменяются только с широтой. Это будет иметь место при $m = 0$. Внутри одной зоны, отделенной от других с севера и с юга параллелями, зональная гармоника сохраняет свой знак.

Гармоники называются *секториальными,* если их знак может изменяться только с долготой. Это имеет место при $n = m$. Присоединенная функция Лежандра, при этом, равна:

$$P_n^n(\sin\varphi) = \cos^n\varphi\frac{d^n P_n(\sin\varphi)}{(d\sin\varphi)^n} = \cos^n\varphi Const$$

Поскольку косинус широты не меняет знака, то внутри одного сектора не изменяет знака и сферическая гармоника. Шар оказывается расчлененным на сектора - полосы, которые соединяют северный и южный полюса.

Гармоники, для которых $0 < m < n$ на поверхности шара образуют мозаичную картину, подобно шахматной доске и называются *тессеральными* от латинского tessera-мозаичный кубик. Секториальные и тессеральные гармоники при вращении планеты создают во внешнем пространстве переменное во времени гравитационное поле, что значительно осложняют теорию движения искусственных и естественных спутников планеты.

Определение массы планеты. Первый член разложения гравитационного потенциала имеет вид *GM/r*. Если бы другие члены разложения не оказывали никакого действия на движение спутников, или, хотя бы возмущения от них были за пределами точности наблюдения, движение спутника подчинялось бы закону Кеплера.

Пусть M - масса планеты, которую нужно определить, m - масса спутника. Под действием сил притяжения, подчиняющихся закону обратных квадратов, оба небесных тела движутся по эллиптическим орбитам, в фокусе каждой из них расположен центр масс системы (барицентр). В частном случае - это могут быть и круговые орбиты. Для упрощения вопроса именно этот случай мы и будем рассматривать. Пусть l - расстояние спутника от планеты, a - расстояние спутника от барицентра, тогда $l + a(1 + m/M)$. Двигаясь по круговой орбите, спутник имеет ускорение, равное $F/m = \omega^2 a = GM/l^2$, где $\omega = 2\pi/T$, а T - период обращения спутника. Отсюда:

$$GM = (2\pi / T)^2 al^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} a^3 (1 + \frac{m}{M})^2$$

При $m << M$ выражение в скобках можно не отличать от единицы и формулу для определения массы планеты переписать в следующем виде:

$$GM = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2} \quad . \qquad (6)$$

Полученная формула есть не что иное, как третий закон Кеплера: квадраты периодов обращения планет, относятся так же, как кубы их расстояний до центрального тела (Солнца).

Формула (6) получена для частного случая кругового движения, хотя в небесной механике доказано, что она справедлива и для эллиптического движения. В этом случае под a нужно понимать большую полуось эллиптической орбиты.

Формула (6) дает возможность определить массу планеты только в том случае, когда гравитационная постоянная нам известна. Ее определяют с помощью физического эксперимента. К сожалению, точность этих экспериментов пока еще не достаточно высока, хотя со времени Кавендиша - английского ученого, который одним из первых определил гравитационную постоянную, точность ее определения выросла на два порядка за 150 лет. Сейчас принято $G = (6{,}6726 \pm 0{,}0005) \cdot 10^{-11}$ СИ. Произведения гравитационной постоянной на массу определяются значительно точнее. Например, для Земли эта величина равна 398600,5±0,3, то есть относительная погрешность равна 10^{-6}, тогда как относительная погрешность гравитационной постоянной составляет приблизительно 10^{-4}. В качестве фундаментальных постоянных часто рассматривают именно произведения масс на гравитационную постоянную, которые называют *планетоцентрическими* гравитационными постоянными (*геоцентрическая, селеноцентрическая, ареоцентрическая и т.д.*)

Определение характеристик гравитационного поля Земли. Чем детальнее нам нужно знать гравитационное поле, тем большее число параметров определяют аналитическое выражение для силовой функции поля тяготения планеты. В эпоху, когда спутники еще были недоступны, основным методом исследования гравитационного поля был гравиметрический. Гравиметрия - область геофизики, изучающая способы наиболее высокоточного определения удельной силы тяжести и ее геологической интерпретации. Этой наукой занимаются как физики, механики так и геологи.

До 20-х годов XX столетия наука не располагала средствами для измерения удельной силы тяжести на морях и океанах с точностью достаточной, для ее геологического истолкования. В 1922-1929 гг. голландский ученый-геодезист Венинг-Мейнес разработал способ наблюдения колебаний маятников на слабо качающемся основании. Используя подводную лодку в качестве лаборатории, он совершил ряд плаваний в Юго-Восточную Азию, исследовал регион, содержащий островные дуги и глубоководные впадины. Идеи Венинг-Мейнеса были реализованы в Государственном астрономическом институте им. П.К. Штернберга профессором Л.В.Сорокиным. До Великой Отечественной войны Л.В.Сорокин с учениками совершил ряд плаваний на подводных лодках на Черном море, в Баренцовом, Охотском и Беринговом морях. Только война остановила эти исследования. Однако, после войны они вновь активизировались.

Были разработаны и другие методы для измерения силы тяжести на обычных исследовательских судах, были изобретены морские гравиметры, способные измерять приращение силы тяжести с относительной точностью не хуже 10^{-4}. В морских гравиметрических исследованиях после войны принимали активное участие и другие страны, в частности США, Англия, Германия, Франция, Италия и Япония. Они и сейчас продолжают активное исследование гравитационных полей акваторий, в особенности нефтегазоносных акваторий.

Потенциал тяжести.

Термин тяжесть (по-английски gravity) указывает на то, что пробное тело и опора взаимодействуют. Первое давит на опору, второе дает отклик в виде реакции опоры. Эти две силы разной физической природы. Первая имеет гравитационное происхождение, а вторая - электромагнитное (упругая сила). Если бы тело находилось в покое, то обе силы были бы равны и противоположны по направлению. Однако, любое тело неподвижное относительно поверхности Земли, движется с ускорением, так как совершает вместе с Землей суточное вращение. По этой причине сумма сил, действующих на тело, не равна нулю. Результирующая направлена в сторону оси вращения и равна $F = R\omega^2 \cos\varphi$, где R - радиус Земли в сферическом приближении, ω - угловая скорость вращения, φ - геоцентрическая широта пробного тела.

В теоретической механике широко используется принцип Даламбера: задачи динамики можно заменить задачами статики, если ввести в рассмотрения силы инерции - силы равные и противоположно направленные тем силам, которые создают ускорение системе отсчета. В частности, если пробное тело неподвижно на поверхности Земли, то к силе притяжения нужно добавить с обратным знаком ту силу, которая сообщает пробному телу центростремительное ускорение. Эта сила обычно называется центробежной. Подчеркнем, что никакой физической природы центробежная сила не имеет. Она вводится лишь для того, чтобы все задачи механики во вращающейся системе координат решать, не принимая во внимание неинерциальность системы отсчета, связанной с вращающейся поверхностью Земли.

Результирующая сил тяготения и центробежной силы получила название силы тяжести. Этот термин в физике и геофизике имеет разное толкование. В физике под силой тяжести понимается та сила, с которой тело, обладающее массой m притягивается к Земле. Если тело освободить от всех связей, то оно будет падать свободно с ускорением g. Тогда сила тяжести, сообщающая телу ускорение свободного падения, равна $P = mg$. Эта сила не может служить характеристикой гравитационного поля, так как зависит от массы пробного тела. Для того чтобы силу тяжести превратить в характеристику поля, необходимо пробное тело сделать стандартным, в геофизике обычно берут массу пробного тела равную единице. Другими словами, вместо силы тяжести для характеристики поля используют удельную силу тяжести, то есть силу, отнесенную к единице массы.

В качестве единицы измерения удельной силы тяжести берут не Ньютоны на килограмм, а миллигалы, единица, введенная Вихертом, и широко применяющаяся в геофизике. По размерности, удельная сила тяжести совпадает с ускорением. Единица измерения 1 Гал равна ускорению 1 см/с^2, 1 мГал соответствует ускорению 10 мкм/с^2. С повышением точности, уменьшаются и единицы измерения. В настоящее время существуют приборы, в которых изменение удельной силы тяжести измеряют в микрогалах (мкГал) и даже в наногалах.

Нужно сказать, что в русской литературе вместо длинного термина удельная сила тяжести чаще употребляется просто сила тяжести, по умолчанию предполагается, что масса пробного тела равна единице. Хотя в некоторых статьях, посвященных гравиметрическим вопросам, вместо термина сила тяжести применяют и ускорение свободного падения, и ускорение силы тяжести. В англоязычной литературе силу тяжести в нашем понимании называют просто gravity (тяжесть) или на немецком языке - schwehre, что тоже обозначает тяжесть. Мы будем придерживаться, в основном наших русских традиций, хотя иногда вместо силы тяжести будем говорить просто тяжесть (см. заголовок настоящего раздела).

Потенциал или силовая функция для силы тяжести состоит из двух частей:

$$W(x, y, z) = V(x, y, z) + \Omega(x, y) \qquad (7)$$

Здесь, снова, декартова система координат выбрана традиционно: ось Oz совпадает с осью вращения планеты, две другие оси лежат в экваториальной плоскости.

Гравитационный потенциал (силовую функцию для сил притяжения) $V(x, y, z)$ мы рассмотрели в предыдущих разделах. Остается определить силовую функцию для центробежной силы ("центробежный потенциал") $\Omega(x, y)$. Поскольку вектор центробежной силы равен:

$$F_{ЦБ} = (\omega^2 x, \omega^2 y, 0)^T,$$

нетрудно догадаться, что

$$\Omega(x, y) = 1/2\ \omega^2 (x^2 + y^2).$$

Поверхность $W(x, y, z)$ = Const является поверхностью равного потенциала или эквипотенциальной поверхностью. Сила тяжести равна производной этого потенциала по вдоль внутренней нормали. Равенство нулю компоненты силы, касательной к поверхности, говорит о том, что эта поверхность является поверхностью уровня. Меняя значение постоянной для потенциала, мы получим семейство поверхностей, обладающих следующими свойствами:

- чем больше значение силы тяжести, тем ближе две соседние уровенные поверхности,
- две уровенные поверхности не пересекаются. Если бы они могли пересекаться, то в точке пересечения существовали бы две нормали, а следовательно и две силы тяжести, что невозможно.

Фигуры равновесия небесных тел.

Все планеты Солнечной системы находятся в состоянии, близком к гидростатическому равновесию. Принято считать, что планеты с массой больше 10^7 т имеют шарообразную форму, потому что массы, слагающие тело планет, обладают свойством пластичности. Планеты приобретают форму, как если бы они были жидкими. В этом случае уровенная поверхность будет поверхностью планеты. В действительности поверхность планеты не совпадает с уровенной поверхностью. Эти отличия свидетельствуют об отклонениях от состояния гидростатического равновесия и являются предметом изучения геофизиков и геодезистов. Введены специальные термины тля обозначения поверхностей уровня для планет. Эквипотенциальная поверхность Земли, по предложению Листинга, называется геоидом. По аналогии, уровенную поверхность для Луны называют селеноидом, уровенную поверхность Марса - ареоидом, и т.п

Основные теоремы:

Теорема Ляпунова. Единственно устойчивой фигурой равновесия покоящейся жидкости является сфера. Следствием этой теоремы можно усмотреть шарообразность всех планет Солнечной системы.

Теорема Пуанкаре. Единственно возможным движением жидкости, находящейся в состоянии относительного равновесия, является равномерное вращение вокруг одной из главных осей инерции. Понятно, что в случае, когда планета близка к состоянию гидростатического равновесия, ее ось вращения почти совпадает с главной осью инерции.

Теорема Лихтенштейна. Фигура равновесия однородной жидкости всегда симметрична относительно плоскости, проходящей через центр инерции и перпендикулярной к оси вращения. Эту теорему называют еще теоремой о существовании экватора.

Исследования показали, что потенциал притяжения гидростатически равновесной планеты содержит лишь четные зональные гармоники:

$$V(x,y,z)=\frac{GM}{r}\left(1-\sum_{k=1}^{\infty}J_{2k}(\frac{a}{r})^{2k}P_{2k}(\sin\varphi)\right), \qquad (8)$$

причем мультипольные моменты J_{2k} убывают как J_2^k.

Эллипсоид как фигура равновесия. Как мы уже говорили, внутри однородного эллипсоида, как и для шара, сила притяжения подчиняется закону Гука: она прямо пропорциональна отклонению материальной точки от положения равновесия. В теории потенциала доказано, что силовая функция для внутренней точки имеет вид $V(x, y, z) = V_0 - Px^2 - Qy^2 - Rz^2$. Тогда компоненты силы притяжения пропорциональны координатам притягиваемой точки $F = -2(P_x, Q_y, R_z)^T$. Здесь P, Q, R и V_0 - постоянные, зависящие от плотности и параметров эллипсоида и не зависящие от координат точки. Приведем эти формулы без вывода:

$$V_0 = abc\pi G\sigma\int_0^{\infty}\frac{ds}{\Delta(s)},$$

$$P = abc\pi G\sigma\int_0^{\infty}\frac{ds}{(a^2+s)\Delta(s)},$$

$$Q = abc\pi G\sigma\int_0^{\infty}\frac{ds}{(b^2+s)\Delta(s)}, \qquad (9)$$

$$R = abc\pi G\sigma\int_0^{\infty}\frac{ds}{(c^2+s)\Delta(s)},$$

где $\Delta(s)=\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}$.

Если притягиваемая материальная точка - внешняя, то для нее силовая функция сохраняет тот же вид, но V_0, P, Q, R перестают быть постоянными, а зависят от координат точки. Для их вычисления справедливы те же интегралы, что и для внутренней точки, но нижний предел не нуль, а величина v, которая выбирается таким образом, чтобы эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2+v}+\frac{x^2}{b^2+v}+\frac{x^2}{c^2+v}=1$$

проходил через заданную внешнюю точку.

Потенциал тяжести от потенциала притяжения отличается тем, что аддитивно содержит потенциал центробежной силы $W(x, y, z) = V(x, y, z) + 1/2(x^2 + y^2)\omega^2$. Подставляя сюда выражение для потенциала притяжения эллипсоида, получим

$$W(x,y,z)=V_0+(\frac{1}{2}\omega^2-P)x^2+(\frac{1}{2}\omega^2-Q)y^2-Rz^2. \qquad (10)$$

Если поверхность эллипсоида является поверхностью уровня, то такой эллипсоид будет гидростатически равновесным. Уравнением уровенной поверхности будет $W(x, y, z) = W_0$, где W_0 - постоянная величина. Возникает вопрос, можно ли подобрать такую угловую скорость вращения для трехосного эллипсоида с заданными полуосями, чтобы его поверхность оказалась поверхностью уровня? Нетрудно убедиться, что нельзя. Уравнением трехосного эллипсоида в данном случае будет выражение:

$$(P-\frac{1}{2}\omega^2)x^2+(Q-\frac{1}{2}\omega^2)y^2+z^2=V_0-W_0. \qquad (11)$$

Определим большие полуоси:

$$a^2 = (V_0 - W_0)/(P - \frac{1}{2}\omega^2),$$
$$b^2 = (V_0 - W_0)/(Q - \frac{1}{2}\omega^2), \qquad (12)$$
$$c^2 = (V_0 - W_0)/R.$$

Очевидно, что если из первого уравнения мы определим угловую скорость, то совсем не обязательно, чтобы эта угловая скорость удовлетворяла второму уравнению. Тем не менее специалистами в области теории фигур равновесия небесных тел доказано существование равновесных трехосных эллипсоидов, которые пол учили название эллипсоидов Якоби.

Эллипсоид Маклорена. В частном случае $a = b$, поэтому $P = Q$. Из уравнения (12) получим:

$$V_0 - W_0 = c^2 R, \qquad \omega^2 = 2(\frac{a^2}{c^2 R} - P)\,.\, D = \sqrt[3]{GM/\omega^2} \qquad (13)$$

Полученные уравнения определяют постоянные W_0 и ω^2. По-видимому, для любых заданных полуосей эллипсоида вращения можно найти угловую скорость вращения, такую, что данный эллипсоид становится фигурой равновесия.

Модель "планеты Роша". *Под "планетой Роша" мы будем понимать такую фигуру равновесия, в которой вся притягивающая масса сосредоточена в и одной точке - центре масс, а вектор силы тяжести образуют векторная сумма силы притяжения и центробежной силы. Тогда уравнением "поверхности" такой планеты будет:*

$$\frac{GM}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) = W_0\,. \qquad (14)$$

Рассмотрим, сначала, как выглядит поверхность уровня вблизи начала координат. В этом случае величину $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ можно считать малой, а W_0, наоборот, большой. Пренебрегая в (15.34) вторым слагаемым в левой части формулы, получим: $r \approx W_0/GM$. Это уравнение замкнутой поверхности, которая по мере приближения к началу координат становится все более похожей на сферу. Назовем ее псевдосферой.

По мере отдаления от начала координат в плоскости $z = 0$ мы достигнем таких точек, в которых сила притяжения и центробежная сила становятся равными и противоположно направленными, то есть $-GM/r^2 + \omega^2 r = 0$, Отсюда $r^3 = GM/\omega^2$. Мы получили уравнение окружности с радиусом, равным $D = \sqrt[3]{GM/\omega^2}$. Понятно, что во всех точках этой окружности сила тяжести равна нулю.

Если двигаться дальше от начала координат, мы придем к варианту, когда $x^2 + y^2$ будет большой величиной, а GM/r, наоборот, малой. Тогда пренебрегая первым членом в формуле (15.34), получим уравнение поверхности, близкой к круговому цилиндру $x^2 + y^2 \approx 2W_0/\omega^2$. Это уже разомкнутая поверхность уровня. Планеты с такой поверхностью существовать не могут.

Таким образом, гидростатически равновесная планета может существовать только внутри "полости Роша", где сила тяжести всюду отлична от нуля, и направлена по нормали внутрь этой поверхности. Поверхность такой планеты имеет овальную форму, сплюснутую с полюсов.

Сфероид Клеро. *Сфероидом* в геодезии называют поверхность вращения, близкую к сфере. В первом приближении в качестве уравнения сфероида можно принять:

$$r = a(1 - \alpha\sin^2\varphi). \qquad (15)$$

Очевидно, что на экваторе $r = a$, а на полюсах $\varphi = \pm\pi/2$, $r = b = a(1 - \alpha)$. Фигура, уравнение которой удовлетворяет формуле (15) обладает *сжатием*: полярный радиус ее меньше экваториального. Из определения следует, что $\alpha = (a - b)/a$.
Установим связь между коэффициентом J_2 и сжатием планеты. Потенциал притяжения равен:

$$V(r,\varphi) = \frac{GM}{r}\left(1 - J_2\frac{a^2}{r^2}P_2(\sin\varphi)\right),$$

а потенциал тяжести –

$$W(r,\varphi) = \frac{GM}{r}\left(1 - J_2\frac{a^2}{r^2}P_2(\sin\varphi)\right) + \frac{1}{2}\omega^2 r^2\cos^2\varphi. \qquad (16)$$

В приведенной формуле мы ограничились лишь коэффициентом J_2, отбросив все остальные мультипольные моменты, так как в случае гидростатически равновесной фигуры, они будут иметь более высокий порядок малости, чем постоянная J_2.

Введем обозначение $\overline{q} = \omega^2 a / \dfrac{GM}{a^2} = \dfrac{\omega^2 a^3}{GM}$. Новая малая величина есть, грубо говоря, отношение центробежной силы на экваторе к силе притяжения. Следовательно $\omega^2 r = \dfrac{GM}{a^3}\overline{q}r$. Подставим полученное выражение в (16) и вынесем за общие скобки отношение GM/r:

$$W(r,\varphi) = \frac{GM}{r}\left(1 - J_2\frac{a^2}{r^2}P_2(\sin\varphi) + \frac{1}{2}\overline{q}\frac{r^3}{a^3}\cos^2\varphi\right). \qquad (17)$$

Приравнивая полученное выражение постоянной W_0, получим уравнение сфероида.

Теорема Клеро устанавливает связь между параметрами сфероида, силой тяжести на его поверхности и коэффициентами разложения гравитационного потенциала.

Сжатие сфероида Клеро. Сравним формулу (17) с (15). Учитывая, что a, J_2, q - малые величины, запишем приближенное равенство:

$$\frac{GM}{r}\left(1 - J_2P_2(\sin\varphi) + \frac{1}{2}\overline{q}\cos^2\varphi\right) = W_0.$$

Решим полученное выражение относительно r:

$$r = \frac{GM}{W_0}\left(1 - J_2P_2(\sin\varphi) + \frac{1}{2}\overline{q}\cos^2\varphi\right) \qquad (18)$$

Чтобы отождествить полученную формулу с уравнением сфероида (15), примем во внимание, что:

$$P_2(\sin\varphi) = \frac{3}{2}\sin^2\varphi - \frac{1}{2}, \qquad \cos^2\varphi = 1 - \sin^2\varphi.$$

Поставляя эти равенства в (18), получим:

$$r = \frac{GM}{W_0}\left(1 - \frac{J_2}{2}(3\sin^2\varphi - 1) + \frac{\overline{q}}{2}(1 - \sin^2\varphi\right) =$$

$$= \frac{GM}{W_0}\left((1 + \frac{J_2}{2} + \frac{\overline{q}}{2}) - (\frac{3}{2}J_2 + \frac{\overline{q}}{2})\sin^2\varphi\right)$$

Сравнивая полученное выражение с (18) и учитывая, что J_2 и q - малые величины, получим:

$$a = \frac{GM}{W_0}(1 + \frac{J_2}{2} + \frac{\overline{q}}{2}), \qquad \alpha = \frac{3}{2}J_2 + \frac{\overline{q}}{2}. \qquad (19)$$

Отсюда определяем постоянную W_0:

$$W_0 = \frac{GM}{a}(1 + \frac{1}{2}J_2 + \frac{\overline{q}}{2}). \qquad (20)$$

Итак, первая часть теоремы Клеро устанавливает связь между сжатием равновесной планеты с первым коэффициентом зональной гармоники разложения гравитационного потенциала и угловой скоростью вращения планеты.

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(3J_2 + \overline{q}\right), \text{ или подробнее: } \alpha = \frac{1}{2}\left(3\frac{C-A}{Ma^2} + \frac{\omega^2 a^3}{GM}\right). \qquad (21)$$

Вторая часть теоремы Клеро определяет зависимость силы тяжести на поверхности равновесной планеты от широты.

Сила тяжести на поверхности сфероида Клеро. Вернемся снова к формуле потенциала тяжести для сфероида (17). Для того чтобы получить силу тяжести, нам нужно потенциал продифференцировать по нормали к поверхности уровня. Однако, поскольку наш сфероид мало отличается от сферы, дифференцирование по нормали мы заменим дифференцированием по радиус-вектору, что значительно проще.

Обозначив производную по радиус-вектору буквой γ, получим:

$$\gamma = \frac{\partial W(r,\varphi)}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{GM}{r}\left[1 - J_2\frac{a^2}{r^2}P_2(\sin\varphi) + \frac{\overline{q}}{2}\frac{r^3}{a^3}\cos^2\varphi\right]\right) =$$

$$= -\frac{GM}{r^2}\left(1 - \frac{3a^2}{r^2}J_2 P_2(\sin\varphi) - \overline{q}\frac{r^3}{a^3}\cos^2\varphi\right) \approx$$

$$\approx -\frac{GM}{a^2}\left(1 - \alpha\sin^2\varphi\right)^{-2}\left(1 - 3J_2P_2(\sin\varphi) - \overline{q}\cos^2\varphi\right).$$

С точностью до малых величин первого порядка будем иметь:

$$\gamma = \frac{GM}{a^2}\left(1 + 2\alpha\sin^2\varphi - \frac{3}{2}J_2(3\sin^2\varphi - 1) - \overline{q}(1 - \sin^2\varphi)\right) =$$

$$= \frac{GM}{a^2}\left((1 + \frac{3}{2}J_2 - \overline{q}) + (2\alpha - \frac{9}{2}J_2 + \overline{q})\sin^2\varphi\right) \approx$$

$$\approx \frac{GM}{a^2}\left((1 + \frac{3}{2}J_2 - \overline{q})(1 + (2\alpha - \frac{9}{2}J_2 + \overline{q})\sin^2\varphi)\right).$$

Сила тяжести на экваторе, согласно полученной формуле, равна:

$$\gamma_e = \frac{GM}{a^2}(1 + \frac{3}{2}J_2 - \overline{q}), \qquad (22)$$

а для любой широты:

$$\gamma = \gamma_e(1 + \beta\sin^2\varphi), \qquad (23)$$

где $\beta = 2\alpha - \frac{9}{2}J_2 + \overline{q}$. С помощью (21) исключим J_2: $3J_2 = 2\alpha - \overline{q}$, то есть

$$\beta = \frac{5}{2}\overline{q} - \alpha. \qquad (24)$$

Здесь $\gamma_e = \frac{GM}{a^2}(1 + \alpha - \frac{3}{2}\overline{q})$.

Формулами (23) и (24) мы и завершим изложение теоремы Клеро.

Два предела сжатия для фигур равновесия. Коснемся сначала истории нашего вопроса. И.Ньютон для объяснения явления, которое заметили многое астрономы, отъезжающие в экспедиции для наблюдений солнечного затмения в экваториальную зону, астрономические часы маятникового типа отстают по сравнению с Парижской обсерваторией, где они строго выверялись, на 2,5 минуты в сутки. Ньютон предположил, что виной тому служит эллипсоидальная форма Земли и, естественно, ее суточное вращение. Предполагая, что Земля - однородный эллипсоид вращения, он получил, что сжатие земного эллипсоида должно быть равным 1,25 q =1:230.

Современник Ньютона Гюйгенс решает ту же задачу, но другим путем. Он предположил, что силы *притяжения* направлены к центру, а эллипсоидальность поверхности уровня возникает только за счет центробежной силы. Таким образом, если Ньютон в качестве фигуры равновесия брал эллипсоид Маклорена, то Гюйгенс - фигуру, которую мы назвали "планетой Роша". Он получил, что сжатие равно 0.5q = 1:576. Результат, который значительно отличается от Ньютоновской оценки сжатия.

$$\frac{1}{2}\overline{q} < \alpha < \frac{5}{4}\overline{q}.$$

Вернемся к теории Клеро. Согласно его теории сжатие равновесной планеты должно быть равно $\alpha = \frac{1}{2}\left(3\frac{C-A}{Ma^2} + \overline{q}\right)$. Первый предел сжатия получим, если примем Землю однородным двухосным эллипсоидом, для которого $C = \frac{2}{5}Ma^2$, $A = \frac{1}{5}M(a^2 + b^2)$.

Отсюда: $\frac{C-A}{Ma^2} = \frac{1}{5}\frac{a^2 - b^2}{a^2}$.

Но $\alpha = \frac{a-b}{a}, b = a(1-\alpha), \frac{C-A}{Ma^2} \approx \frac{2}{5}\overline{q}$. Следовательно, $(1 - \frac{3}{2}\frac{2}{5})\alpha = \frac{1}{2}\overline{q}$ и, наконец,

$$\alpha = \frac{5}{4}\overline{q}. \tag{25}$$

Мы получили то же значение, что и Ньютон, правда с точностью до первой степени сжатия.

Второй предел сжатия, мы получим, если будем считать все притягивающие массы шаром, тогда $C = A$ и

$$\alpha = \frac{1}{2}\overline{q}. \tag{26}$$

Таким образом, реальное сжатие лежит между этими двумя пределами:

$$\frac{1}{2}\overline{q} < \alpha < \frac{5}{4}\overline{q}.$$

Для иллюстрации сказанного приведем сжатия некоторых планет Солнечной системы, а также их возможные предельные значения.

Сравнивая значения сжатия, мы видим, что фигура планеты в значительной степени зависит от ее внутреннего строения. Планеты Земля и Марс весьма далеки от того строения, которое принял Гюйгенс: планета имеет компактное твердое притягивающее тело, окруженное рыхлой оболочкой. По величине сжатия можно судить о том, что к такой модели более подходят планеты гиганты.

Сжатия планет

Название планеты	сжатие		
	по Ньютону	по Гюйгенсу	реальное
Земля	1:230	1:576	1:297
Марс	1:174	1:434	1:192
Юпитер	1:9,4	1:23,5	1:15

Сатурн	1:5,1	1:12,8	1:10
Уран	1:10,6	1:26,6	1:14

Приведенные данные взяты из книги акад. А.А. Михайлова "Курс гравиметрии и теории фигуры Земли", опубликованной в 1939 году. Современные данные могут несколько отличаться от приведенных выше, хотя общая картина не изменится.

Гравитационные аномалии и строение Земли.

Гравитационные аномалии. Термин аномалии означает отклонения от некоторой "нормы" - то есть значения, которое можно предсказать, вычислив его по формуле. Вычисленное значение силы тяжести называют "нормальным", а наблюденное - аномальным. Если принять Землю равновесным эллипсоидом вращения, то значение силы тяжести можно вычислить по формуле (15.45), в которой постоянные нужно считать известными. Эти данные определяются из наблюдений и зависят от методики их вычислений, от объема и качества наблюдательных данных. Построение "нормальной" формулы для вычисления силы тяжести требует привлечения экспериментальных данных, полученных в разных странах, в разных экспедициях. В последние 3-4 десятилетия широко используются и спутниковые наблюдения, которые резко увеличили надежность результатов.

Для того чтобы карты гравитационных аномалий, полученных разными авторами, можно было сравнивать и анализировать, необходимо, чтобы гравитационные аномалии вычисляли по одинаковым методикам. По этой причине Международный Геофизический и Геодезический союз на своей Генеральной Ассамблее в августе 1971 года утвердил следующую формулу для нормальной силы тяжести:

$$\gamma = 978031{,}85(1 + 0{,}0053024\sin^2 \varphi - 0{,}0000059 \sin^2 \varphi \qquad (27)$$

В качестве "нормальной Земли" принят *общий земной эллипсоид* с параметрами:

$$a = 6378137 \pm 2\ м,$$
$$\omega = 7292115 \cdot 10^{-11}\ c^{-1},$$
$$J_2 = (1082{,}63 \pm 0.005) \cdot 10^{-8},$$
$$GM = (398600{,}5 \pm 0{,}3)\ км^3 c^{-2}.$$

Сжатие этого эллипсоида, определенное по спутниковым данным, равно $\alpha = 1{:}\ 298.256$. Известно, что сила тяжести зависит от высоты точки наблюдения. Наблюдения производятся, в крайнем случае, на уровне моря, то есть на высоте, равной нулю. Все сухопутные определения силы тяжести выполняются на разных высотах. Так как поверхность эллипсоида не совпадает с поверхностью уровня, поэтому развита теория приведения гравитационной аномалии (редукции) к одной и той же поверхности. Кроме того, сила тяжести зависит и от масс, лежащих между эллипсоидом и геоидом. Чтобы учесть и эти факторы, развита теория геологических редукций. В таком случае вместе с гравитационными аномалиями обязательно должен указываться и вид редукций, с которыми данная аномалия вычислена. Существуют аномалии *в свободном воздухе*, аномалии *Фая*, аномалии *Буге*, изостатические аномалии и т. п.

Изостазия. Расчеты фигуры Земли, начиная с Ньютона, производились при условии, что Земля находится в состоянии гидростатического равновесия, что достаточно близко характеризует реальное состояние Земли. Отклонение поверхности геоида от поверхности сфероида как раз связано с некоторым отклонением реального состояния Земли от гидростатического равновесия. Спутниковые данные показали, что это отклонение имеет величину порядка квадрата сжатия (α^2). Отклонение фигуры Земли от равновесной составляет $\alpha^2 \approx 70$ м.

В связи с тем гравитационное поле (и соответственно геопотенциал) состоит из слагаемых, существенно различающихся по величине, оно разделяется на нормальное поле с потенциалом Wq и возмущенное (аномальное) с добавочным потенциалом T. Потенциал сфероида (27) определяет нормальное поле сил тяжести и, соответственно, нормальную фигуру Земли. Отклонения геоида от сфероида не превышают 70 м, с помощью спутниковых данных построены карты высот геоида (отклонений от сфероида).

Высоты геоида пропорциональны амплитудам гравитационных аномалий. Интересно то, что аномалии не связаны с топографическими особенностями поверхности (горы, впадины и т.п.), кстати, последние и не описываются поверхностью геоида. Из этого следует важнейший вывод: континентальные области изостатически скомпенсированы, т.е. материки как бы плавают в подкоровом субстрате, словно гигантские айсберги в полярных морях. Аномалии силы тяжести вызваны различными флуктуациями плотности в коре и мантии Земли.

Рис. 1. Изостатическое равновесие между корой и мантией.

Идея изостазии, высказанная в середине XIX века, объяснила тот удивительный факт, что наличие гор почти не сказывается на гравиметрических измерениях. Согласно принципу изостазии, легкая земная кора, состоящая из гранита и базальта, изостатически уравновешена на более тяжелой мантии, как показано на рис. 1.

Получается так, что масса вещества на единицу площади, измеренная вплоть до некоторой глубины в коре или мантии, приблизительно одинакова для всей поверхности Земли.

Гравитационные аномалии на Земле, как правило, меньше 100 *мГал*, их среднеквадратическая вариация по Земле составляет величину около 20 *мГал*. Следовательно, гравитационное поле Земли достаточно гладкое. Для экстремальных условий (островные дуги, глубоководные впадины) гравитационные аномалии достигают величины 400 *мГал*, что в 12,5 раз меньше разницы в значениях силы тяжести на полюсе и экваторе и составляют всего 0,04% от величины силы тяжести. Потому для получения данных, по которым можно судить о внутреннем строении нашей планеты, необходимо изучать аномалии на уровне не только миллигал но и микрогал, чего и добиваются геофизики.

Вторая характеристика гравитационного поля - это отклонение отвесной линии (вертикали) от нормали к эллипсоиду. Это отклонение также невелико и составляет секунды дуги. Геодезические работы в Индии близ горного массива Гималаев показали, что координаты астрономических пунктов из-за отклонений отвесной линии отличаются от геодезических на 5,2", тогда как вычисленное отклонение, связанное с притяжением гор, составляет 27,9". Для объяснения этого явления английский геодезист Пратт высказал мысль, что под горами плотность пород гораздо меньше, чем коренные породы под равнинами. Иными словами, если все породы разбить на блоки, то плотность этих блоков должна зависеть от их толщины: чем толще блок, тем меньше плотность. При этом вес всех блоков на некоторой поверхности, называемой *поверхностью компенсации*, один и тот же. Вся земная кора, таким образом, находится в равновесии. Эта гипотеза Пратта получила название *изостатической*.

Конечно, с геологической точки зрения эта гипотеза никуда не годится. Французский геодезист Эри предложил более правдоподобную схему: земные блоки по Эри подобно айсбергами на море плавают на более плотной, но и более пластичной среде - верхней мантии. В этом случае, так же как и у айсбергов, должна образоваться под горными массивами "подводная часть" с плотностью, меньшей, чем плотность вмещающих пород. Таким образом эффект гравитационной компенсации должны создавать *корни гор*, существование которых сейсмологи подтверждают.

Строение земной коры невозможно изучить, пользуясь только одним методом. Геофизики применяют все доступные им методы, прежде всего сейсмологический и гравиметрический. По современным представлениям земная кора имеет разную толщину в разных регионах. В горах толщина ее достигает 60 и более километров. Состоит она из разных слоев. Большой объем занимает кислые (гранитные) породы с плотностью 2,67. Равнины покрыты осадочными породами толщиной несколько километров и с плотностью 2,2. Ниже этих слоев лежат основные породы - базальты с плотностью 2,8. Толщина коры для равнинных регионов полагают равной 30 *км*. Горные районы и равнины образуют основные морфологические особенности континентов. При переходе к океану, гранитный слой постепенно выклинивается, а осадочные породы покрывают на абиссальных котловинах, в основном, базальтовые породы. При этом толщина коры становится меньше и в среднем составляет 10-15 *км*. Особенно тонкой кора становится в глубоководных впадинах (4-5 *км*).

Приливы.

Приливообразующий потенциал. Всем хорошо известен морской прилив, когда два раза в сутки вода поднимается у морских берегов, затем вновь откатывается от берега. Но прилив существует не только на море, но и на суше. Два раза в сутки поверхность земли, на которой выстроены все дома, улицы, дороги, поднимаются и опускаются. В Москве амплитуда этих колебаний составляет приблизительно 0,5 м. Но мы этого не замечаем. Отчего это происходит?

Как известно, результатом действия силы на тело является либо его ускорение, если оно свободно и не взаимодействует с другими телами, либо его деформация, если такое взаимодействие существует. Притяжения Луны и Солнца нашей планеты сообщают ей ускорение, которое она имеет, совершая движение по орбите. Однако не все части планеты испытывают одинаковое притяжение. В качестве притягивающего тела возьмем пока только Луну. Максимальное притяжение Луной испытывают те части Земли, для которых она находится строго в зените, а минимальное - в надире. Центр масс Земли находится в промежуточном положении. Результирующая сила притяжения планеты приложена к центру масс. Она сообщает Земле поступательное ускорение. Для описания процессов в системе отсчета, связанной с Землей, то есть в неинерциальной системе координат, кроме упомянутых сил притяжения необходимо ввести силу инерции, равную массе какого-либо пробного тела умноженную на ускорение системы отсчета и направленную в сторону, противоположную ускорению системы отсчета.

Пренебрегая размером, строением и формой Луны, запишем удельную силу притяжения пробного тела, находящегося на Земле. Пусть r' - радиус-вектор, направленный от пробного тела в сторону Луны, r'- длина этого радиус-вектора, тогда сила притяжения этого тела Луной будет равна:

$$F = \frac{GM_L}{r'^3} r'. \qquad (28)$$

Здесь GM_L - селеноцентрическая гравитационная постоянная. Пробное тело поместим в точку P. Сила притяжения пробного тела помещенного в центр масс Земли будет равна:

$$F_0 = \frac{GM_L}{r^3} r, \qquad (29)$$

где r соответственно радиус-вектор, соединяющий центры масс Земли и Луны, и его абсолютная величина. Тогда приливной силой называется разность этих двух сил притяжения:

$$F\text{пр} = F - F_0. \qquad (30)$$

В формулах (28) и (29) притягивающее тело (Луна) рассматривается как материальная точка или шар со сферически симметричным распределением масс. Силовая функция притяжения пробного тела Луной ничем не отличается от силовой функции притяжения шара (материальной точки), то есть она равна GM_L/r'. Что касается второй силы, приложенной к центру масс и являющейся силой инерции для всех материальных точек Земли, то она строго постоянная. Для получения силовой функции для этой силы нам необходимо ввести временную систему координат. Ось Ox проведем из центра Земли и направим в сторону Луны. Направления двух других осей - произвольные. Тогда силовая функция для силы F_0, очевидно, равна $(GM_L/r^2)x + Const$. Приливообразующий потенциал равен разности этих двух силовых функций. Обозначив его через δW, будем иметь:

$$\delta W = GM_L/r' - (GM_L/r^2)x - Const.$$

Постоянную $Const$ определим при условии, что приливообразующий потенциал в центра Земли равен нулю. При этом $x = 0$, $r' = r$. Поэтому $Const = GM_L/r$. Следовательно, для приливообразующего потенциала можно записать:

$$\delta W = GM_L \left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} - \frac{x}{r^2} \right). \qquad (31)$$

Поскольку $r' = \sqrt{(r-x)^2 + y^2 + z^2}$, то $\frac{1}{r'} = \frac{1}{r}\left(\left(1 - \frac{x}{r}\right)^2 + \frac{y^2+z^2}{r^2} \right)^{-\frac{1}{2}}$.

Полагая отношения x/r, y/r, z/r малыми, последнее выражение можно представить следующим образом:

$$\frac{1}{r'} \approx \frac{1}{r}\left(1 + \frac{x}{r} - \frac{x^2+y^2+z^2}{2r^2} + \frac{3}{2}\frac{x^2}{r^2} \right) = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{x}{r} + \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{2r^2} \right). \qquad (32)$$

Подставим полученное выражение в (31), получим:

$$\delta W = GM_L \frac{2x^2 - y^2 - z^2}{2r^2}.$$

Выражение для приливообразующего потенциала можно уточнить, если в (31) отношение $1/r'$заменить разложением в ряд по полиномам Лежандра, подобно тому, как мы делали при выводе гравитационного потенциала планеты. Пусть ρ - расстояние точки P от центра планеты (от начала сферической системы координат), а θ - геоцентрическое зенитное расстояние притягивающего тела (Луны), тогда:

$$\frac{1}{r'} = \frac{1}{r}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n P_n(\cos\theta) = \frac{1}{r}\left(1 + \frac{\rho}{r}\cos\theta + \sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n P_n(\cos\theta) \right).$$

Поскольку $x = \rho \cos \theta$, получим:

$$\frac{1}{r'}=\frac{1}{r}+\frac{x}{r^2}+\frac{1}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n P_n(\cos\theta).$$

Поставляя полученное выражение в формулу для приливообразующего потенциала (31), окончательно получим:

$$\delta W=\frac{GM_L}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{\rho}{r}\right)^n P_n(\cos\theta). \qquad (33)$$

Остается определить приливообразующий потенциал на поверхности планеты. Поскольку на поверхности сферической планеты $\rho = R$, то:

$$\delta W=\frac{GM_L}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\cos\theta). \qquad (34)$$

Приливная деформация уровенной поверхности планеты. Приливное возмущение потенциала неизбежно деформирует уровенную поверхность планеты. Выполним приближенную оценку этих искажений. Для простоты будем считать, что Земля шар со сферически симметрично распределенной массой. Тогда ее невозмущенный гравитационный потенциал на поверхности планеты имеет простой вид GM/R. Для точки *P*, находящейся на расстоянии ρ от центра сферы гравитационный потенциал Земли равен *GM/ρ*. Добавляя сюда приливной потенциал, получим возмущенную поверхность уровня:

$$W=\frac{GM}{\rho}+\frac{GM_L}{r}\frac{2x^2+y^2+z^2}{2r^2}=W_0.$$

В качестве константы мы возьмем невозмущенный гравитационный потенциал на поверхности. Тогда, после деления на гравитационную постоянную, получим:

$$\frac{1}{\rho}+\frac{M_L}{M}\frac{2x^2+y^2+z^2}{2r^2}=\frac{1}{R}.$$

Здесь переменными величинами являются *x, y, z* и *ρ*. Обозначим отношение масс гравитирующего тела к массе планеты греческой буквой μ и решим полученное выражение относительно ρ:

$$\rho=R\left(1-\mu\frac{R}{r}\frac{2x^2-y^2-z^2}{2r^2}\right)^{-1}\approx R\left(1+\mu\frac{R}{r}\frac{2x^2-y^2-z^2}{2r^2}\right).$$

Так как $\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2$, с той же степенью точности получим:

$$x^2+y^2+z^2=R^2\left(1+2\mu\frac{R}{r}\frac{2x^2-y^2-z^2}{2r^2}\right).$$

Преобразуем полученное выражение:

$$\left(1-2\mu\frac{R^3}{r^3}\right)x^2+\left(1+\mu\frac{R^3}{r^3}\right)\left(y^2+z^2\right)=R^2.$$

Учитывая, что отношения *R/r*

$$\cos z=\frac{1}{r'}(r\cos\theta-R),$$

$$r'=\sqrt{r^2+R^2-2Rr\cos\theta}.$$

- малые величины последнее выражение можно переписать так:

$$\frac{x^2}{R^2\left(1+2\mu\frac{R^3}{r^3}\right)}+\frac{y^2+z^2}{\left(1-\mu\frac{R^3}{r^3}\right)}=1.$$

Мы получили уравнение двухосного эллипсоида, у которого ось вращения совпадает с осью x, то есть с прямой, соединяющей притягивающее тело с центром Земли. Полуоси этого эллипсоида, очевидно, равны:

$$a = (1 + \mu R^3/ r^3)R,$$
$$b = c = (1 - 1/2(\mu R^3)/r^3)R. \qquad (35)$$

Итак, уровенная поверхность, заданная в виде шара, вследствие приливного действия другого небесного тела вытягивается в сторону этого тела и превращается в эллипсоид вращения. Большая полуось будет превышать радиус планеты на величину $\Delta a = R\mu\left(\frac{R}{r}\right)^3$, а малые полуоси будут меньше радиуса на величину $\Delta b = \Delta c = \mu\frac{R}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^3$. Заметим, кстати, что с той же степенью точности произведение всех трех полуосей остаются постоянными, что говорит о неизменности объема, ограниченного поверхностью уровня.

Для иллюстрации сказанного приведем численный пример. Вычислим приливной "горб" на Земле, вызванный притяжением Луны. Радиус Земли равен R = 6378 *км*, расстояние между центрами Земли и Луны равно $384.4 \cdot 10^3$ *км*, отношение масс Луна/Земля равно 1:81. Подставляя эти данные в формулу для увеличения большой полуоси, получим 0,36 *м* Нетрудно подсчитать, что на Луне аналогичный приливной горб, направленный в сторону Земли будет равен 13 *м*.

Необходимо подчеркнуть, что в приведенных рассуждениях не учитывается приливные деформации самой Земли, что также изменит поверхность уровня. Для строгих выкладок необходимо задать модель Земли, ее строение, упругие постоянные и т.п., что, конечно, выходит далеко за рамки нашего курса.

Преобразование формулы для приливообразующего потенциала. Аргументом полиномов Лежандра является геоцентрическое зенитное расстояние притягивающего небесного тела θ. Рассмотрим треугольник *OPL*. Сторона *OP*, как мы знаем, равна радиусу Земного шара R (если точка P находится на поверхности земного шара), сторона *OL* равна расстоянию между центрами масс притягивающего и притягиваемого тела r, угол между этими сторонами равен геоцентрическому зенитному расстоянию θ, угол между сторонами *PL* и продолжением стороны *OP* равен зенитному расстоянию z. Проекция стороны *OL* на продолжение стороны *OP* равна $r \cos\theta = r' \cos z + R$. Отсюда:

$$\cos z = \frac{1}{r'}(r\cos\theta - R),$$
$$r' = \sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr\cos\theta}.$$

Можно ли заменить геоцентрическое зенитное расстояние топоцентрическим, которое используется в астрономии? Какую ошибку мы сделаем, если заменим в формуле (35) угол θ зенитным расстоянием z Очевидно, что мы должны оценить величину $|\cos z - \cos\theta|$ = max.

Пусть отношение $u = R/r$ является малой величиной, тогда:

$$\cos z = \frac{r}{r'}\left(\cos\theta - \frac{R}{r}\right) = \frac{\cos\theta - u}{\sqrt{1 - 2u\cos\theta + u^2}} \approx$$
$$\approx (\cos\theta - u)(1 + u\cos\theta) \approx \cos\theta - u(1 - \cos^2\theta),$$

Следовательно, $|\cos z - \cos\theta| \approx u\sin\theta$. Эта величина максимальна при $\theta = \pi/2$. Так если гравитирующее тело - Луна, то u = 6.371/384.4=0.0166. Следовательно, максимальное искажение зенитного расстояния в системе Земля-Луна не превосходит 1,7%. Для большинства задач этим отличием можно пренебречь и в качестве приливообразующего потенциала брать

$$\delta W = \frac{GM_L}{r}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{R}{r}\right)^n P_n(\cos z). \qquad (36)$$

Понятно, что наибольший вклад в приливные явления создает первый член формулы (36). Очень часто им и ограничиваются, хотя при строгом анализе приливных явлений приходится учитывать и остальные члены разложения (36).
Итак, приливообразующий потенциал с точностью до R^2/r^2 имеет вид:

$$\delta W_2 = \frac{GM_L}{r}\frac{R^2}{2r^2}(3\cos^2 z - 1). \qquad (37)$$

Выполним некоторые преобразования полученной формулы и приведем к общепринятому виду. Поскольку $\cos^2 z = \frac{1}{2}(1+\cos 2z)$, то, подставляя это выражение в формулу (37) после несложных преобразований, получим:

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + n^2 x = n^2 \cos\omega t.$$

$$\delta W_2 = \frac{3GM_L}{4r}\left(\frac{R}{r}\right)^2 (\cos 2z + \frac{1}{3}). \qquad (38)$$

Величина $D = \frac{3GM_L R^2}{4r^3}$ называется *постоянной Дудсона*. Теперь вместо (38) можно записать:

$$\delta W_2 = D(\cos 2z + \frac{1}{3}). \qquad (39)$$

Заметим, что *постоянная Дудсона* вовсе не является, постоянной величиной, так как расстояние между притягивающим и притягиваемым телами изменяются из-за того, что они движутся по орбитам, строго говоря, не эллиптическим, подчиняясь законам небесной механики. В книге бельгийского ученого П. Мельхиора известного специалиста по приливам приводятся численные значения постоянных Дудсона:

для Луны $D = 3D\left(\sin^2\varphi\sin^2\delta - \frac{1}{3}(\sin^2\varphi + \sin^2\delta) + \frac{1}{9}\right) =$

$= 2{,}6206$ *м*^{2}/*с*2,

для Солнца $D = 1{,}2035$ *м*^{2}/*с*2.

Типы приливных волн. Все наблюдаемые приливные явления делятся на полусуточные, суточные и долгопериодические. Вернемся к формуле (15.59), в которой переменной величиной будем считать только зенитное расстояние. Известно, что

$$\cos z = \sin\varphi\sin\delta + \cos\varphi\cos\delta\cos H,$$

$$\cos 2z = 2\cos^2 z - 1,$$

$$\cos^2 H = \frac{1}{2}(\cos 2H + 1),$$

где φ - широта места наблюдения, δ - склонение светила, H - часовой угол, поэтому

$$\cos 2z = 2\sin^2\varphi\,\sin^2\delta + 4\sin\varphi\,\cos\varphi\,\sin\delta\,\cos\delta\,\cos H + 2\cos^2\varphi\,\cos^2\delta\,\cos H - 1.$$

Подставляя полученное выражение в (15.59), будем иметь:

$$\delta W_2 = D\left(\cos 2z + \frac{1}{3}\right) = D\left(2\sin^2\varphi\sin^2\delta + \cos^2\varphi\cos^2\delta - \frac{2}{3}\right) +$$

$$+D\sin 2\varphi\sin 2\delta\cos H + D\cos^2\varphi\cos^2\delta\cos 2H.$$

Первая группа членов не зависит от часового угла. Здесь переменная величина только склонение, которое меняется медленно. Это долгопериодная часть приливообразующего потенциала. Второй член приведенной суммы имеет аргументом H - часовой угол, который меняется от 0 до 2π за одни сутки. Следовательно, он формирует суточный прилив. Третий член с аргументом $2H$, как нетрудно догадаться - полусуточный.

Долгопериодические приливы. Будем помечать долгопериодическую компоненту приливного потенциала штрихом. Тогда

$$\delta W' = D\left(2\sin^2\varphi\sin^2\delta + \cos^2\varphi\cos^2\delta - \frac{2}{3}\right) =$$

$$= D\left(2\sin^2\varphi\sin^2\delta + (1-\sin^2\varphi)(1-\sin^2\delta) - \frac{2}{3}\right) =$$

$$= D\left(3\sin^2\varphi\sin^2\delta - (\sin^2\varphi + \sin^2\delta) + \frac{1}{3}\right) =$$

$$= 3D\left(\sin^2\varphi\sin^2\delta - \frac{1}{3}(\sin^2\varphi + \sin^2\delta) + \frac{1}{9}\right).$$

Окончательно

$$\delta W' = 3D\left(\sin^2\varphi - \frac{1}{3}\right)\left(\sin^2\delta - \frac{1}{3}\right). \qquad (40)$$

Этот прилив имеет период, равный половину периода обращения притягивающего светила за счет изменение склонения. Если это - лунный прилив, то период его две недели, если солнечный - полгода. Линия узлов (приливообразующий потенциал равен нулю) проходит по параллелям, для которых $\sin^2\varphi = 1/3$, то есть $\varphi = \pm 35°16'$.

Долгопериодический прилив имеет зональную конфигурацию, он изменяет момент инерции Земли относительно оси вращения и, следовательно, изменяет и ее скорость вращения. Этот прилив можно наблюдать с помощью радиотелескопов со сверхдлинной базой, позволяющих обнаруживать ничтожно малые изменения в продолжительности суток.

Суточные приливы. Они определяются вторым членом в приливообразующем потенциале

$$\delta W'' = D\sin 2\varphi \sin 2\delta \cos H. \qquad (41)$$

За одни сутки часовой угол H изменяется на 2π, что и определяет периодичность этого члена потенциала. Небольшие отличия от суток вносит изменение склонения светила. У этого прилива линии узлов проходят по меридиану ($H = \pm$ 12 часов) и по экватору. Поверхность шара оказывается поделенной на четыре части, причем южное полушарие повторяет северное, но с другим знаком. Такую конфигурацию прилива мы относим к тессеральным. Этот прилив не изменяет момента инерции, и, следовательно, не меняет угловую скорость вращения Земли.

Полусуточные приливы. Третий тип приливов определяется членом

$$\delta W''' = D\cos^2\varphi \cos\delta \cos H. \qquad (42)$$

Изменение аргумента на 2π достигается за 12 часов, что и сообщает этой части приливообразующего потенциала полусуточную периодичность. Линии узлов - два меридиана с часовыми углами H = 3 часа и H = 9 часов. Поверхность Земли оказывается снова рассеченной на четыре части, на четыре сектора. Отсюда и секториальная конфигурация полусуточного прилива.

Подъем уровенной поверхности будет наблюдаться в секторе, обращенном в сторону притягивающего тела. В противоположном секторе - также подъем. В секторах, ориентированных под углом $\pi/2$ - минимум.

Периоды приливообразующего потенциала, подсчитанные только по часовому углу, слишком упрощенный подход. Во-первых, мы рассматривали только одно притягивающее тело - Луну, хотя значительный вклад и земные приливы вносит и Солнце. Приливы от Луны и Солнца, строго говоря, нельзя рассматривать как сумму приливов отдельно от Луны и от Солнца, так как сами формулы для вычисления потенциала нелинейные. Линейным образом этот потенциал зависит лишь от масс этих небесных тел, что же касается геометрии - то нелинейная зависимость очевидная. Приливную силу, действующую на планету, можно представить в виде суммы гармоник с аргументами, выражающиеся линейной комбинацией углов, которые можно представить в виде $a\tau+ bs +ch + dp +eN' +fps$, где

τ - среднее лунное время,

s - средняя долгота Луны,

h - средняя долгота Солнца,

p - долгота перигея Луны,

ps - долгота перигея Солнца.

Аргументным числом называется шестизначное число (a, $b + 5$, $c + 5$, $d +5$, $e +5$, $f +5$).

Приведем здесь перечень основных приливных волн (по П.Мельхиору "Земные приливы"):

волна	период	аргументное число	периодическая функция
M_2	12.25	(255.555)	$A \cos 2\tau$
N_2	12.39	(245.655)	$A \cos (2\tau - s + p)$
O_1	25.49	(145.555)	$A \cos (\tau - s)$
K_1	23.56	(165.555)	$A \cos (\tau + s)$
M_f	две недели	(075.555)	$A \cos 2s$
M_m	тропический месяц	(065.455)	$A \cos (s + p)$
S_2	12.00	(273.555)	$A \cos (2\tau+2 s -2h)$
P_1	24.04	(163.555)	$A \cos (\tau + s -2h)$

В приведенной таблице период указан в часах и минутах. Полусуточные приливы- это M_2, N_2 и S_2. Первые два связаны с Луной, третий -- с Солнцем. Суточные приливы это O_1 (*Луна*), P_1 и K_1 (*Солнце*). Поскольку периоды приливных волн известны точно, так как движения небесных тел подчинятся законам небесной механики, то для исследования приливных волн применяют методы гармонического анализа. Представление приливных явлений гармониками введено еще известным геофизиком Дарвиным (1883). Изложенная выше классификация гармоник предложена Дудсоном. Им же, а затем и Леколазе предложены методы гармонического анализа. Среди российских ученых известен метод Перцева, который позволяет не только выделять отдельные гармоники, но и исключать дрейф в записи приливных волн.

Наблюдения приливных явлений на Земле. Наблюдаемые приливные явления на Земле:
- морские приливы,

- вариации высот земной поверхности,
- вариации силы тяжести,
- вариации отклонений отвесной линии,
- вариации угловой скорости вращения Земли,
- деформации земной коры,
- колебания уровня подземных вод.

Наблюдения за морскими приливами осложнены тем, что на высоту морского прилива влияют конфигурация берегов, температура и соленость воды, климатически условия. Учесть все эти факторы с необходимой точностью - очень сложная задача. Дж.Дарвин наблюдал долгопериодическую составляющую морского прилива и получил, что амплитуда приливной волны составляет всего 2/3 от расчетной.
Наблюдения вариаций высот земной поверхности также технически очень сложная задача.

Пусть точка P лежит на земной поверхности. Через эту точку проходит поверхность уровня $W = C$. Невозмущенная приливами поверхность уровня $W_0 = C$ проходит через другую точку, назовем ее точкой Q. Вектор силы тяжести есть отношение приращения потенциала к расстоянию между точками P и Q. Для определенности будем считать, что точка P расположена выше точки Q, а расстояние между ними равно ς_0. Тогда $g = -(W_0(P) - W_0(Q))/\ \varsigma_0$.

Но $W(P) = W_0(P) + \delta W(P)$, поэтому $g\,\varsigma_0 = W_0(Q) - (W_0(P) - \delta W_0(P)) = \delta W(P) + (W_0(Q) - W(P))$.
Выражение в скобках равно нулю, так как по условию и возмущенный потенциал в точке P и невозмущенный потенциал в точке Q равны одной и той же постоянной C.
Итак, приливная вариация высоты поверхности уровня для абсолютно твердой Земли определяется через приливообразующий потенциал следующим образом

$$\varsigma_0 = \delta W/g. \tag{43}$$

Согласно (39) приливные колебания поверхности уровня можно вычислить по формуле:

$$\varsigma_0 = \frac{D}{g}\left(\cos 2z + \frac{1}{3}\right). \tag{44}$$

Поверхность Земли, естественно, не повторяет движений поверхности уровня, хотя и "тянется" за ней. В первом приближении можно считать, что колебания поверхности Земли пропорциональны колебаниям поверхности уровня:

$$\varsigma = h\varsigma_0. \tag{45}$$

Таким образом, число h есть упругая постоянная, которая называется *первым числом Лява*.

При деформации Земли происходят перераспределение масс. При этом изменяется и собственный гравитационный потенциал планеты. Предполагая, что изменение потенциала пропорционально приливообразующему потенциалу, можно записать:

$$\delta W^* = k\delta W. \tag{46}$$

Постоянная k есть *второе число Лява.*

Если бы Земля была абсолютно твердой, то никаких деформаций бы не было и обе упругие постоянные Лява равнялись бы нулю. В действительности первое число приблизительно равно 0,5, а второе 0,2.

Вариации силы тяжести. Обратимся снова к формуле (15.58). Чтобы получить приливную вариацию силы тяжести нужно продифференцировать приливообразующий потенциал по радиусу Земли, а знак производной изменить на обратный, так как при увеличении силы тяжести растет компонента силы, направленная внутрь Земли.

$$\Delta g_0 = -\frac{\partial(\delta W)}{\partial R} = -\frac{\partial D}{\partial R}\left(\cos 2z + \frac{1}{3}\right) = -\frac{2D}{R}\left(\cos 2z + \frac{1}{3}\right). \tag{47}$$

В частности, лунный прилив создает вариацию силы тяжести

Δg_o = - 82(cos2z + 1/3) мкГал, а солнечный

Δg_o = - 38(cos2z + 1/3) мкГал.

Формула (47) дает возможность вычислить изменение силы тяжести только за счет приливообразующего потенциала, но не учитывает того факта, что высота прибора (гравиметра), с помощью которого измеряются вариации, также изменятся под действием тех же приливов. Известно. Что с увеличением высоты сила тяжести уменьшается, таким образом происходит усиление вариаций силы тяжести (приблизительно на 20%). Так, если приливная вариация силы тяжести для твердой Земли есть Δg_o, то истинной приливной вариацией будет:

$$\Delta g = \delta\Delta g_o, \qquad (48)$$

где множитель δ называется дельта фактором.

Дельта фактор постоянные Лява связаны между собой, в первом приближении, линейной зависимостью:

$$\delta = 1 + h - 3/2\ k. \qquad (49)$$

Как мы уже говорили, вариации силы тяжести измеряют специальным гравиметром, обладающим очень высокой чувствительностью. Такой гравиметр обычно не переносят из одной точки в другую. Он устанавливается стационарно на специальных станциях, где ведутся непрерывные наблюдения за приливами. В Московском университете такая станция имеется в ГАИШе в отделе гравитационных измерений. Гравиметр связан с компьютером, на котором выполняется графическое представление изменения силы тяжести.

Формула (15.69) выведена при условии, что приливная волна имеет очень большое период, то есть практически - это статический вариант, которого в действительности не бывает. Экспериментальные исследования показали, что упругие постоянные нельзя считать постоянными величинами: они зависят от периода волны. Зависимость дельта-фактора от периода приливной волны является очень сильным средством для тестирования принятой модели планеты.

Отклонения отвесной линии. Приливные силы изменяют не только величину силы тяжести, но ее направление, что отклоняет отвесную линию. Формулу для оценки отклонений отвесной линии получим, если продифференцируем изменение высоты уровенной поверхности по горизонтальной координате. Из формулы (15.54) следует, что угол отклонения отвесной линии в плоскости меридиана для абсолютно твердой Земли равен

$$\xi_0 = -\frac{\partial \xi_0}{\partial (Rz)} = -\frac{D}{Rg}\frac{\partial}{\partial z}\left(\cos 2z + \frac{1}{3}\right) = \frac{2D}{Rg}\sin 2z. \qquad (50)$$

Согласно Мельхиору: для Луны ξ_0 = 0,0173” sin2z, для Солнца ξ_0 = 0,0078” sin2z. Наблюдения за отвесной линией производят высокочувствительными горизонтальными маятниками на специальном подвесе, который позволяет усилить влияние ничтожно малых отклонений вертикали относительно жесткого основания. Применяют также и вертикальные маятники, которые помещают в скважины. Высокую чувствительность в этом случае обеспечивается специальными датчиками перемещений. Приборы, предназначенные для регистрации вариаций в направлении отвесной линии, носят название *наклономеров*. В любом случае непрерывно регистрируется вариации вертикали относительно опоры. Та, в свою очередь, также подвержена влиянию приливных сил, которые наклоняют опорную площадку. Если бы Земля была абсолютно жидкой, наклон ее поверхности совпал бы с поверхностью уровня, никакой прибор не сумел бы отметить отклонение отвесной линии. Для абсолютно твердой Земли отклонение отвесной линии можно вычислить по формуле (15.70). Очевидно, что для реальной Земли это отклонение нужно вычислять с учетом упругости, то есть нужно снова ввести фактор

$$\xi = \gamma\xi_0. \qquad (51)$$

Между гамма-фактором и числами Лява также имеется связь:

$$\gamma = 1 + k - h. \qquad (52)$$

Однако гамма-фактор не является глобальной характеристикой планеты, а скорее отражает местные геологические особенности. В частности, в Японии делаются попытки использовать наблюдения за вариациями отклонений отвеса для предсказания землетрясений.

Космогоническое значение исследования приливов. Вклад приливных взаимодействий между спутником и планетой особенно отчетливо виден на примере системы Земля-Луна. Наш спутник обращен к нам всегда одной стороной, то есть его вращение вокруг оси строго синхронизировано с периодом обращения вокруг Земли. Почему?

Существует гипотеза о приливном торможении вращения Земли. Ее идея заключается в следующем. Земля является упругим телом и подобно линейному осциллятору на периодическое внешнее воздействие дает реакцию в виде перемещений масс и фазового запаздывания. Уравнение линейного осциллятора, как известно, имеет вид:

$$\ddot{x} + 2\varepsilon\dot{x} + n^2x = n^2\cos\omega t.$$

Периодическое решение этого уравнения имеет вид: $x = \lambda\cos\omega(t - t_{зап})$,

$$\text{где } \lambda = \left(\left(1 - \frac{\omega^2}{n^2}\right)^2 + \frac{4\varepsilon^2\omega^2}{n^4}\right)^{-\frac{1}{2}}, \quad t_{зап} = \frac{1}{\omega}\arctan\frac{2\varepsilon\omega}{n^2 - \omega^2}.$$

При $n = \omega$ имеем резонансное решение $x_{рез} = Q\cos(nt - \pi/2)$, где Q называется добротностью осциллятора. Для Земли добротность равна около 100 и с глубиной растет. Фазовые задержки (запаздывание) для полусуточного прилива составляет 3-4, что соответствует добротности $Q = 15$. Это противоречит сейсмическим данным, которые указывают на более высокую добротность. Возможно, дополнительная диссипация энергии происходит за счет морских приливов.

Фазовая задержка приводит к тому, что ближайший к Луне приливной горб Земли оказывается смещенным. Луна, притягивая этот приливной горб, сообщает Земле вращательный момент, тормозящий вращение. Однако, противоположный приливной горб, наоборот ускоряет вращение. Поскольку работает закон обратных квадратов, то второй горб дает меньший момент и сумма их, в целом. замедляет вращение Земли. Расчеты показывают, что замедление должно увеличивать продолжительность суток на 3,5 *мс* за столетие. В действительности сутки увеличиваются только на 2 *мс* за 100 лет. Следовательно, имеется и другой механизм потери энергии, скорее всего - это водная оболочка Земли.

Поскольку масса Земли существенно превосходит массу Луны, то приливное торможение Луны давно завершилось, и поэтому Луна всегда обращена на Землю одной стороной. Гравитационное влияние двух приливных горбов на Земле приводит к тому, что имеется составляющая приливной силы, направленная вдоль траектории движения Луны, которая сообщает ей дополнительную механическую энергию. Подчиняясь законам механики, Луна отдаляется от Земли со скоростью 3 *см* в год, двигаясь по спирали. Если предположить, что скорость "убегания" Луны от Земли за последние миллиарды лет сохранилась, то 1,5 *млрд. лет* Луна была в 10 раз ближе, а приливной эффект от нее в 1000 раз сильнее! Конечно, такие оценки слишком грубые, необходимо применять более строгую теорию эволюции системы Земля-Луна.

Эффект Этвеша (ЭЭ) **-** явление, заключающееся в том, что в одном и том же месте у предмета, находящегося в покое, и предмета, движущегося относительно Земли, ускорение силы тяжести имеет различные значения. ЭЭ обусловлен изменением центробежной составляющей силы тяжести, зависящей от скорости движения предмета.

При движении в направлении вращения Земли, т. е. с запада. на восток, скорость предмета складывается со скоростью вращения и центробежная сила увеличивается, а следовательно, уменьшается действующая сила тяжести; и, наоборот, — сила тяжести увеличивается при движении против вращения Земли. Величина ЭЭ (в Галах) равна

$$\Delta g = 0{,}00405V \cos \varphi \sin A + 0{,}00000121 V^2,$$

где (φ - широта, A- азимут движения, отсчитываемый по часовой стрелке от направления на север, V — скорость предмета относительно Земли (в км/ч). ЭЭ учитывается при измерениях силы тяжести маятниковыми приборами и гравиметрами, установленными на движущихся кораблях и самолетах. Член с V^2 является практически пренебрежимо малым только при скоростях движения $V<15$ *км/ч.* Эффект назван по имени Л. Этвеша, впервые указавшего на его существование и создавшего прибор для демонстрации ЭЭ в лабораторных условиях.

Этвеш - внесистемная единица градиента силы тяжести, равная изменению ускорения свободного падения на 10^{-9} см/с^2 на расстоянии в 1 см, обозначается E. $1E = 10^{-9}$с$^{-2}$, что соответствует изменению силы тяжести в 0,1 мГал на 1 км. Единица названа по имени Лоранда Этвеша.