

### **Аннотация**

Поиск адекватных мер запутанности для чистых квантовых состояний произвольного числа подсистем является одной из приоритетных задач квантовой информатики. В данной работе представлена вычисляемая мера запутанности произвольного квантового состояния, являющаяся обобщением энтропии фон Неймана на произвольное число подсистем.

# Вычислимая мера квантовой запутанности многокубитных состояний.

Чернявский А.Ю.

25 августа 2008 г.

## 1 ВВЕДЕНИЕ

Задача определение численных характеристик квантовой запутанности является одной из приоритетных в квантовой теории информации. Полностью изучена и классифицирована запутанность чистых состояний двух кубитов. В том числе известен критерий получения одного такого состояния из другого при помощи LOCC (local operations and classical communications) [1]. Для большего же числа подсистем на сегодняшний день получены лишь следующие результаты:

В работе [2] полностью описана классификация чистых трехкубитных состояний в терминах SLOCC (stochastic LOCC).

Для смешанных состояний хорошо изучены условия монотонности мер запутанности относительно LOCC (например [3, 4]).

В различных работах (например, [6, 7, 8]) представлены некоторые меры запутанности чистых и смешанных состояний, а также некоторые критерии "успешности" состояний для квантовых вычислений.

В работе представлена мера запутанности чистых многочастичных состояний. Ее основными достоинствами являются следующие факты:

- данная мера основана на представлении состояния, полностью совпадающем с разложением Шмидта в случае двух подсистем;
- реализован алгоритм вычисления данной меры.

Следует отметить, что проблема нахождения адекватных мер запутанности чистых многочастичных состояний является, пожалуй, самой сложной среди задач теории квантовой запутанности, т.к. она практически эквивалентна нахождению аналогов различных матричных разложений для тензоров высших порядков.

## 2 ЗАПУТАННОСТЬ ДВУХЧАСТИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ

Запутанность чистых состояний двух частиц хорошо изучена и определяется коэффициентами Шмидта этого состояния [5, 1].

**Теорема 2.1** Пусть  $|\psi\rangle$  – чистое состояние составной системы  $AB$ . Тогда существуют такие ортонормированные состояния  $|i_A\rangle$  системы  $A$  и

ортонормированные состояния  $|i_B\rangle$  системы  $B$ , что

$$|\psi\rangle = \sum_i \lambda_i |i_A\rangle |i_B\rangle, \quad (1)$$

где  $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda_i > 0$  и  $\sum_i \lambda_i^2 = 1$ . Коэффициенты  $\lambda_i$  называют коэффициентами Шмидта.

В качестве меры запутанности обычно принимают энтропию квадратов коэффициентов Шмидта (энтропию фон Неймана состояний подсистем  $\rho_A$  и  $\rho_B$ )

$$H_{sh}(\bar{\lambda}) = \sum_i \lambda_i^2 \ln \lambda_i^2.$$

Зафиксируем некоторый ортонормированный базис  $|i_A\rangle$  пространства подсистемы  $A$  и ортонормированный базис  $|j_B\rangle$  пространства подсистемы  $B$ . Пусть состояние  $|\psi\rangle$  в данном базисе имеет вид

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} a_{ij} |i_A\rangle |j_B\rangle.$$

Введем обозначение энтропии исходов ортогональных измерений  $|\psi\rangle$  в базисе  $|i_A\rangle \otimes |j_B\rangle$ :

$$H_{|i_A\rangle, |j_B\rangle}(|\psi\rangle) = H(a_{ij}) = \sum_{i,j} |a_{ij}|^2 \ln |a_{ij}|^2.$$

**Теорема 2.2** Пусть  $|\psi\rangle$  – чистое состояние составной системы  $AB$ . Тогда энтропия исходов ортогональных измерений данного состояния будет минимальна в базисе, соответствующем разложению Шмидта. Т.е.

$$H_{sh}(|\psi\rangle) = \min_{|i_A\rangle, |j_B\rangle} H_{|i_A\rangle, |j_B\rangle}(|\psi\rangle),$$

где минимум берется по всевозможным базисам пространств  $H_A$  и  $H_B$ , соответствующим подсистемам  $A$  и  $B$  состояния  $|\psi\rangle$ .

**Замечание 2.3** Данное свойство разложения Шмидта (Теорема 2.2) можно переформулировать следующим образом: пусть  $|\psi\rangle$  – чистое состояние составной системы  $AB$ , тогда в любых фиксированных базисах  $|i_A\rangle$  и  $|j_B\rangle$

$$H_{sh}(|\psi\rangle) = \min_{U_A, U_B} H_{|i_A\rangle, |j_B\rangle}(U_A \otimes U_B |\psi\rangle),$$

где минимум берется по всем унитарным преобразованиям  $U_A$  и  $U_B$ , действующим в  $H_A$  и  $H_B$  соответственно.

### 3 ЗАПУТАННОСТЬ МНОГОЧАСТИЧНЫХ СОСТОЯНИЙ

Рассмотрим многочастичные состояния. Пусть  $|\psi\rangle \in H$ , где

$$H = H_1 \otimes H_2 \otimes \dots \otimes H_n.$$

По аналогии со случаем двух подсистем введем обозначение энтропии исходов ортогонального измерения состояния  $|\psi\rangle$  в некотором базисе

$$|i\rangle_H = |i_1\rangle_{H_1} \otimes |i_2\rangle_{H_2} \otimes \dots \otimes |i_n\rangle_{H_n} \quad (2)$$

пространства  $H$ . Пусть  $|\psi\rangle = \sum_{|i\rangle_H} a_i |i\rangle_H$  – представление  $|\psi\rangle$  в базисе (2), тогда

$$H_{|i_1\rangle_{H_1}|i_2\rangle_{H_2}\dots|i_n\rangle_{H_n}}(|\psi\rangle) = \sum_i |a_i|^2 \ln |a_i|^2.$$

**Определение 3.1** Мерой запутанности состояния  $|\psi\rangle$  в терминах минимальной энтропии ортогональных измерений (в некотором фиксированном базисе (2)) называется:

$$E_{Hmin}(|\psi\rangle) = \min_{U_1, U_2, \dots, U_n} H_{|i_1\rangle_{H_1}|i_2\rangle_{H_2}\dots|i_n\rangle_{H_n}}(U_1 \otimes U_2 \otimes \dots \otimes U_n |\psi\rangle),$$

где минимум берется по всем унитарным преобразованиям  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , действующим в пространствах  $H_1, H_2, \dots, H_n$  соответственно.

**Замечание 3.2**  $E_{Hmin}$  не зависит от выбранного базиса

$$|i_1\rangle_{H_1} \otimes |i_2\rangle_{H_2} \otimes \dots \otimes |i_n\rangle_{H_n}.$$

**Свойство 3.3** Мера запутанности  $E_{Hmin}$  инвариантна относительно преобразований, действующих на пространствах  $H_1, H_2, \dots, H_n$  (следует из определения).

**Свойство 3.4**

$$E_{Hmin}(|\psi\rangle \otimes |\phi\rangle) = \max(E_{Hmin}(|\psi\rangle), E_{Hmin}(|\phi\rangle)).$$

В информационном смысле данная мера – это минимальное количество физических ресурсов (в битах), необходимое в среднем для хранения результатов измерения состояния.

## 4 МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ $E_{Hmin}$ ДЛЯ $n$ -КУБИТНЫХ СОСТОЯНИЙ

Рассмотрим состояние  $n$  кубит

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=0}^1 a_{i_1 i_2 \dots i_n} |i_1 i_2 \dots i_n\rangle.$$

Тогда

$$E_{Hmin}(|\psi\rangle) = \min_{U_1, U_2, \dots, U_n} H(U_1 \otimes U_2 \otimes \dots \otimes U_n |\psi\rangle),$$

где  $U_i$  является однокубитным оператором, действующим на  $i$ -й кубит,

$$H(|\psi\rangle) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=0}^1 |a_{i_1, i_2, \dots, i_n}|^2 \ln |a_{i_1, i_2, \dots, i_n}|^2.$$

$U_i$  можно представить в виде:

$$U_i(\beta_i, \delta_i, \gamma_i) = \begin{pmatrix} e^{i(-\beta_i - \delta_i)} \cos \gamma_i & -e^{i(-\beta_i + \delta_i)} \sin \gamma_i \\ e^{i(\beta_i - \delta_i)} \sin \gamma_i & e^{i(\beta_i + \delta_i)} \cos \gamma_i \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где  $\beta_i, \delta_i, \gamma_i$  – действительные числа.

Таким образом поиск  $E_{Hmin}(|\psi\rangle)$  сводится к минимизации функции  $3n$  переменных

$$\begin{aligned} & f(\beta_1, \delta_1, \gamma_1, \beta_2, \delta_2, \gamma_2, \dots, \beta_n, \delta_n, \gamma_n) = \\ & = H(U_1(\beta_1, \delta_1, \gamma_1) \otimes U_2(\beta_2, \delta_2, \gamma_2) \otimes \dots \otimes U_n(\beta_n, \delta_n, \gamma_n) |\psi\rangle). \end{aligned}$$

В связи с необходимостью поиска глобального минимума функции  $f$  в качестве метода оптимизации был выбран генетический алгоритм. Каждый параметр  $p_i, i = \overline{1, 3n}$  из множества  $\beta_i, \delta_i, \gamma_i$  кодируется  $n_{gen}$  действительными генами  $g_{ij}, j = \overline{1, n_{gen}}$  по правилу  $p_i = \sum_{j=1}^{n_{gen}} 100^{1-j} g_{ij}$ .

Мутация хромосомы  $g_{1,1}, \dots, g_{3n, n_{gen}}$  определяется следующими вероятностями:

$$P(g_{i,j}^m = g_{i,j}) = (1 - p_{mut}), \quad P(g_{i,j}^m = g_{i,j} + \xi) = p_{mut},$$

где  $g_{1,1}^m, \dots, g_{3n, n}^m$  – хромосома после мутации,  $p_{mut}$  – вероятность мутации,  $\xi$  – случайная величина, равномерно распределенная на отрезке  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ .

Скращиванием двух хромосом  $g_{1,1}^1, \dots, g_{3n, n}^1$  и  $g_{1,1}^2, \dots, g_{3n, n}^2$  является хромосома  $g_{1,1}^r, \dots, g_{3n, n}^r$ , где вероятность

$$P(g_{i,j}^r = g_{i,j}^1) = P(g_{i,j}^r = g_{i,j}^2) = \frac{1}{2}.$$

В качестве функции приспособленности была взята функция

$$-f(\beta_1, \delta_1, \gamma_1, \beta_2, \delta_2, \gamma_2, \dots, \beta_n, \delta_n, \gamma_n).$$

*Описание алгоритма.*

1. Первоначальной популяцией являются  $n_{population}$  случайных хромосом, гены которых представляют собой случайные величины с равномерным распределением на отрезке  $[0, 1]$ .
2. Среди популяции выбираются  $n_{winners}$  хромосом с максимальной функцией приспособленности, из них выбираются  $n_{population} - n_{winners}$  случайных пар.
3. В каждой паре из предыдущего пункта производится скрещивание и над результатом скрещивания производится мутация.
4.  $n_{population} - n_{winners}$  хромосом, полученных в пункте 3, а также  $n_{winners}$  хромосом, отобранных в пункте 2, объявляются следующей популяцией.
5. Процесс повторяется с пункта 2  $n_{evolutions}$  раз и результатом метода считается хромосома из последнего поколения, имеющая наибольшую функцию приспособленности.

## 5 МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ $E_{Hmin}$ ДЛЯ $n$ -КУДИТНЫХ СОСТОЯНИЙ

Рассмотрим состояние  $n$  кудит

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=0}^{d-1} a_{i_1, i_2, \dots, i_n} |i_1 i_2 \dots i_n\rangle.$$

Тогда

$$E_{Hmin}(|\psi\rangle) = \min_{U_1, U_2, \dots, U_n} H(U_1 \otimes U_2 \otimes \dots \otimes U_n |\psi\rangle),$$

где  $U_i$  является  $d$ -мерным оператором, действующим на  $i$ -й кудит,

$$H(|\psi\rangle) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=0}^{d-1} |a_{i_1, i_2, \dots, i_n}|^2 \ln |a_{i_1, i_2, \dots, i_n}|^2.$$

Для того, чтобы вычислить  $H(|\psi\rangle)$ , необходимо параметризовать  $d$ -мерные унитарные матрицы  $U_i$ .

Задача хорошей параметризации произвольной унитарной матрицы является открытой, однако, известны несколько вариантов такой параметризации.

С учетом слабой зависимости генетических алгоритмов от контекста решаемой задачи оптимизации, был выбран наиболее простой в реализации способ параметризации матриц  $U_i$ :

Пусть  $U \subset U(n)$ ,  $A = a_{jk}$  – квадратная матрица порядка  $n$ .

Для произвольной матрицы  $A$  существует ее сингулярное разложение  $A = USV$ , где  $U$  и  $V$  – унитарные матрицы размера  $n \times n$ ,  $S$  – диагональная матрица. Также очевидно, что для произвольной матрицы  $U$  существует матрица  $A$ , такая что сингулярным разложением  $A$  является  $A = USV$  и мы можем параметризовать  $U$  при помощи  $n^2$  комплексных чисел  $a_{jk}$ .

Таким образом, задача вычисления  $E_{Hmin}$  для  $n$ -кудитного состояния

$$E_{Hmin}(|\psi\rangle) = \min_{U_1, U_2, \dots, U_n} H(U_1 \otimes U_2 \otimes \dots \otimes U_n |\psi\rangle),$$

сводится к задаче оптимизации функции  $nd^2$  комплексных переменных:

$$E_{Hmin}(|\psi\rangle) = \min_{a_{ijk}} H(U_1 \otimes U_2 \otimes \dots \otimes U_n |\psi\rangle),$$

где  $a_{ijk}$  являются элементами матрицы  $A_i$ , а  $U_i$  является левым сомножителем в сингулярном разложении матрицы  $A_i = U_i S V$ .

Способом решения такой задачи является тот же генетический алгоритм, что и в предыдущей части.

Применение других способов параметризации унитарных матриц и исследование зависимости сходимости используемого генетического алгоритма от типа параметризации является интересной темой для дальнейшего исследования.

## 6 ВЫЧИСЛЕНИЕ $E_{Hmin}$ НЕКОТОРЫХ СОСТОЯНИЙ

Далее будут рассмотрены конкретные значения меры запутанности  $E_{Hmin}$  для некоторых важных в квантовой теории информации состояний.

Введем следующее определение:

**Определение 6.1** Состояние  $|\psi\rangle$ , имеющее в стандартном вычислительном базисе вид:

$$|\psi\rangle = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=0}^{d-1} a_{i_1 i_2 \dots i_n} |i_1 i_2 \dots i_n\rangle,$$

называется каноническим относительно меры  $E_{Hmin}$ , если

$$E_{Hmin}(|\psi\rangle) = H_{mes}(|\psi\rangle),$$

где  $H_{mes}(|\psi\rangle) = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=0}^{d-1} |a_{ij}|^2 \ln |a_{ij}|^2$  – энтропия исходов измерений в стандартном вычислительном базисе.

### 6.1 ЗАПУТАННОСТЬ $W$ -СОСТОЯНИЙ

Рассмотрим  $W(n)$ -состояния:

$$|W\rangle = \frac{1}{\sqrt{n}}(|0 \dots 01\rangle + |0 \dots 10\rangle + |1 \dots 00\rangle)$$

и обобщенные  $\tilde{W}(n)$ -состояния:

$$|\tilde{W}(n)\rangle = a_1|0 \dots 01\rangle + a_2|0 \dots 10\rangle + a_n|1 \dots 00\rangle,$$

где  $\sum_{i=1}^n |a_i|^2 = 1$ .

Были получены следующие результаты численных экспериментов:

**Свойство 6.2**

$$E_{Hmin}(\tilde{W}(n)) = H_{mes}(\tilde{W}(n)) = \sum_1^n |a_i|^2 \ln |a_i|^2.$$

**Свойство 6.3**

$$E_{Hmin}(W(n)) = H_{mes}(W(n)) = \ln(1/n).$$

Соответственно, из приведенных свойств следует, что состояния  $W(n)$  и  $\tilde{W}(n)$  являются каноническими относительно  $E_{Hmin}$ .

### 6.2 ЗАПУТАННОСТЬ $GHZ$ -СОСТОЯНИЙ

Рассмотрим обобщенные  $GHZ$ -состояния:

$$|GHZ\rangle = a_0|0 \dots 00\rangle + a_1|1 \dots 11\rangle.$$

**Следствие 6.4** Обобщенные  $GHZ$ -состояния являются каноническими относительно меры  $E_{Hmin}$ .

$$E_{Hmin}(|GHZ\rangle) = E_{Hmin}(a_0|00\rangle + a_1|11\rangle) = |a_0|^2 \ln |a_0|^2 + |a_1|^2 \ln |a_1|^2.$$

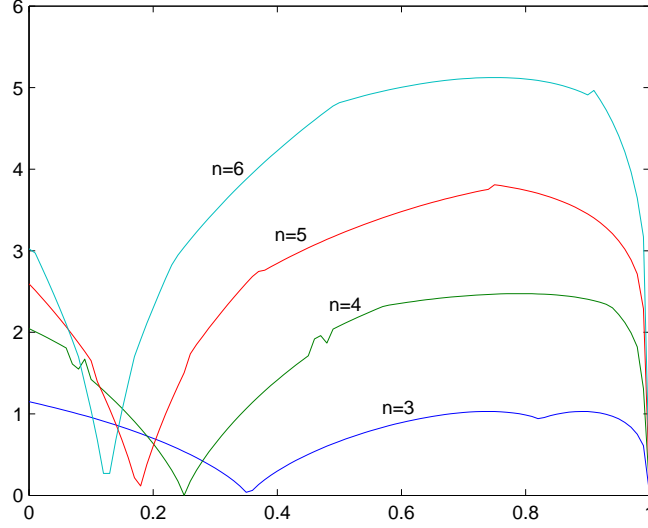


Рис. 1: Запутанность состояний гроверовского типа

### 6.3 СОСТОЯНИЯ ГРОВЕРОВСКОГО ТИПА

Рассмотрим состояния вида:

$$|G\rangle = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=0}^1 a_{i_1 i_2 \dots i_n} |i_1 i_2 \dots i_n\rangle,$$

где

$$a_{i_1 i_2 \dots i_n} = \begin{cases} g_0, & \prod i_k = 0 \\ g_t, & \prod i_k \neq 0 \end{cases}$$

и

$$(N-1) \cdot |g_0|^2 + |g_t|^2 = 1.$$

Будем считать коэффициенты  $g_0$  и  $g_t$  действительными и исследуем зависимость  $E_{Hmin}(|G\rangle)$  от коэффициента  $g_0$ .

На рис.1 приведены соответствующие графики для 3,4,5 и 6-ти кубитных состояний.

### 6.4 ОБЩИЕ СВОЙСТВА $E_{Hmin}$ , ПОЛУЧЕННЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ВЫЧИСЛЕНИЙ

**Определение 6.5** Введем отношение эквивалентности  $\approx^{\text{unit}}$  относительно однокубитных преобразований:

$$|\psi\rangle \approx^{\text{unit}} |\phi\rangle \Leftrightarrow \exists U_1, U_2, \dots, U_n : |\psi\rangle = U_1 \otimes U_2 \otimes \dots \otimes U_n |\phi\rangle.$$



**Свойство 6.6** Пусть состояния

$$|\psi_1\rangle = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=0}^1 a_{i_1 i_2 \dots i_n} |i_1 i_2 \dots i_n\rangle,$$
$$|\psi_2\rangle = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n=0}^1 b_{i_1 i_2 \dots i_n} |i_1 i_2 \dots i_n\rangle$$

являются каноническими относительно меры  $E_{\text{Hmin}}$ , а также  $|\psi_1\rangle \stackrel{\text{unit}}{\approx} |\psi_2\rangle$ .

Тогда множества  $\{|a_{i_1 i_2 \dots i_n}|^2\}$  и  $\{|b_{i_1 i_2 \dots i_n}|^2\}$  равны. Коэффициенты, входящие в эти множества, являются аналогом коэффициентов Шмидта для произвольного состояния  $|\phi\rangle \stackrel{\text{unit}}{\approx} |\psi_1\rangle$ .

## Список литературы

- [1] Нильсен М., Чанг И. "Квантовые вычисления и квантовая информация", МИР 2006.
- [2] W. Dur, G. Vidal, J. I. Cirac, *Three qubits can be entangled in two inequivalent ways*, Phys. Rev. A 62, 062314 (2000), quant-ph/0005115v2.
- [3] Michal Horodecki, *Open Syst. Inf. Dyn.* 12, 231 (2005), quant-ph/0412210v1.
- [4] C. H. Bennett, D. P. DiVincenzo, J. Smolin, and W. K. Wootters, Phys. Rev. A 54, 3824 (1997), quantph/9604024.
- [5] J Preskill, *Lecture Notes for Physics 229: Quantum Information and Computation*, - California Institute of Technology, 1998.
- [6] MB Plenio, *Logarithmic Negativity: A Full Entanglement Monotone That is not Convex*, Phys. Rev. Lett. 95, 090503 (2005), quant-ph/0505071v2.
- [7] G Vidal, RF Werner, *Computable measure of entanglement*, Phys. Rev. A 65, 032314 (2002), quant-ph/0102117v1.
- [8] Akulin V., Burkov A., Chernyavskiy A., Damir A., Ozhigov Y., Valiev K. *Ion trap quantum computations: control and success criterion*, *Quantum Computers and Computing*. - 2006. - V. 6, N 1. - pp. 107-124.