

МНОГОЧАСТИЧНЫЕ ПРОБЛЕМЫ КВАНТОВОЙ ОПТИКИ И КВАНТОВОЙ ИНФОРМАТИКИ

УДК 530.145

МНОГОЧАСТИЧНЫЕ ЗАПУТАННЫЕ КВАНТОВЫЕ СОСТОЯНИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ТЕРМОДИНАМИКИ

© 2007 г. А. Ю. Богданов, Ю. И. Богданов, К. А. Валиев

Физико-технологический институт РАН, 117218 Москва, Россия

E-mail: bogdan@ftian.oivta.ru

Поступила в редакцию 12.10.2006 г.

Термодинамическое равновесие рассмотрено как следствие квантового запутывания вакуумного состояния системы. Разработана и исследована явная математическая модель многочастичных запутанных чистых квантовых состояний, в которой при измерениях возникают распределения вероятностей, в точности соответствующие состоянию теплового равновесия системы в термостате.

PACS: 42.50.Dv

ВВЕДЕНИЕ¹

Настоящая работа тесно связана с нашей недавней работой [2], в которой было введено понятие информации, основанное на разложении Шмидта. Было показано, что введенная информация по своему смыслу характеризует меру неслучайности корреляций между двумя наблюдателями, производящими измерения над квантовыми состояниями Эйнштейна–Подольского–Розена (ЭПР). На примере двумерного нормального распределения, соответствующего вакуумному состоянию двух связанных осцилляторов, было показано, что исходное чистое квантовое состояние, характеризующееся наличием запутанности двух подсистем, при измерении дает распределение вероятностей, соответствующее состоянию теплового равновесия. С точки зрения статистической физики, однако, наибольший интерес представляют не двухчастичные, а многочастичные квантовые состояния. Рассмотрению таких состояний посвящена настоящая работа. Ниже будет построена и исследована явная многочастичная квантовая модель, в которой запутанность возникает благодаря связи частиц-осцилляторов с единым посредником (например, перегородкой или стенкой). Предложенная модель позволяет вскрыть природу и механизм возникновения равновесных квантовых распределений. Показано, что в рассматриваемой системе состояния теплового равновесия возникают автоматически при измерении запутанного вакуумного состояния. Возникающая в системе температура

определяется отношением массы системы частиц к массе связанной с ними перегородки.

Вопрос о природе термодинамических статистических распределений вызывает острые дискуссии со времен Больцмана [1]. В задаче о сведении теории теплоты к механике взгляды Больцмана прошли две стадии (см. статью редактора сборника научных трудов Больцмана Л.С. Полака в [1]). Если на первой стадии речь шла просто о соединении механики с атомным учением, то на второй стадии ключевое значение приобрел вероятностно-статистический аспект теории. Знаменитая H -теорема, сформулированная Больцманом в 1872 г., вызвала жаркие многолетние дискуссии. Принципиально важная проблема заключается в том, что в силу обратимости механических законов симбиоз представлений классической механики и статистики неизбежно оказывается непоследовательным и внутренне противоречивым. Так, например, критикуя основы статистической термодинамики Максвелла–Больцмана, Пуанкаре пишет, что “для того, чтобы усомниться в рассуждении, у которого посылки явным образом противоречат заключению, где мы находим обратимость в посылках и необратимость в заключении, нет необходимости в долгой дискуссии” (см. статью Пуанкаре 1893 г. “Механицизм и опыт” в [1]). Два наиболее известных возражения против статистической механики Больцмана, принадлежащие Лошмидту (коллеге, другу и учителю Больцмана) и Цермело (ассистенту Планка), также основаны на обратимом характере законов классической механики (см. статьи Лошмидта и Цермело в [1]). Ответ Больцмана на рассматриваемые возражения сводился к указанию на статистический характер H -теоремы, которая определяет наиболее вероятную эволюцию системы, не исключая менее веро-

¹ “Нам прежде всего понадобится определить одно из главных понятий общего учения о теплоте – понятие температуры, которое до сих пор все еще нельзя считать достаточно точно и однозначно установленным”. Л. Больцман [1].

ятных событий (флуктуаций). Хотя с практической физической точки зрения ответы Больцмана на все возражения против его теории были очень убедительны, с принципиальной методологической точки зрения вопрос оставался открытым.

Интересно отметить, что с современной точки зрения подход Больцмана к статистической термодинамике не может быть охарактеризован как чисто классический. Так, уже в своей знаменитой работе 1872 г. “Дальнейшие исследования теплового равновесия между молекулами газа”, в которой впервые была сформулирована *H*-теорема, Больцман за 28 лет до работы Планка использовал (в методических целях) представления о квантованном характере энергии. “Таким образом, мы предположим, что наши молекулы могут приобретать не непрерывный ряд живых сил (энергии), а только значения, кратные некоторой величине ϵ . Во всех прочих отношениях мы будем рассматривать ту же проблему, что и раньше. Имеется очень много молекул газа в объеме R . Они могут иметь только следующие значения живой силы: ϵ , 2ϵ , 3ϵ , 4ϵ , ..., $p\epsilon$. Ни одна молекула не может иметь значение живой силы, промежуточное или большее. При соударениях двух молекул их живые силы могут изменяться разными способами. Однако всегда после соударения живая сила каждой молекулы должна быть кратной ϵ ” [1]. Далее, правда, как бы извиняясь за столь радикальное предположение, Больцман пишет: “Трудно было бы вообразить механизм, который бы регулировал соударения двух тел таким образом, что живая сила каждой молекулы после соударения всегда была бы кратна ϵ . Этот вопрос мы не будем здесь обсуждать. Во всяком случае, мы имеем полное право изучать математические следствия этого предположения, которое является не более чем искусственным приемом, помогающим рассчитать физические процессы”. Заметим, что это предположение оставалось еще “не более чем искусственным приемом” у Планка при рассмотрении излучения и стало обеспечено реальным физическим “механизмом” только в работах Бора, Гейзенберга и Шредингера.

Из сказанного следует, что де-факто исторически никогда не существовало классической статистической механики как последовательного раздела физики. Любые попытки объединения механики и статистики логически вели к квантовым представлениям (пусть и в неявной форме, как у Больцмана и Планка). В квантовой механике ситуация с проблемой обратимости, которая так волновала оппонентов Больцмана, существенно другая по сравнению с классической механикой [3]. Несмотря на то, что уравнение Шредингера само по себе симметрично относительно обращения времени, квантовая механика в целом содержит внутри себя неэквивалентность обоих направлений времени. Несимметричность квантовой теории относительно направления времени связана с

необратимостью, возникающей за счет редукции вектора состояния при измерениях. Эта необратимость обусловлена принципиально статистическим характером законов квантовой теории. Квантовая механика может рассматриваться как такое обобщение механики классической, в котором статистические закономерности играют фундаментальную роль [4]. Следуя Л.Д. Ландау и Е.М. Лифшицу, отметим, что “в квантовой механике имеется физическая неэквивалентность обоих направлений времени, и в принципе закон возрастания энтропии мог бы быть ее макроскопическим выражением... Однако до настоящего времени никому не удалось сколько-нибудь убедительным образом проследить такую связь и показать, что она действительно имеет место. Вопрос о физических основаниях закона монотонного возрастания энтропии остается, таким образом, открытым” [3].

Запутанность (entanglement) является одним из основных понятий квантовой информатики. Она служит важным ресурсом для квантовых вычислений и квантовой криптографии. Роль запутанности в задаче измерения квантовых состояний изучалась различными авторами. Обзор этих исследований можно найти в работах Менского [5], Цее [6] и Зурека [7]. Учет запутанности между различными степенями свободы квантовых битов (кубитов) и их окружением играет важную роль в задачах обеспечения качества квантовых информационных систем [8, 9].

Рассматриваемые вопросы, как нам представляется, имеют важное значение как с фундаментальной, так и прикладной точек зрения. С фундаментальной точки зрения важно, что квантовая механика является принципиально статистической теорией. В этом смысле квантовая теория изначально содержит внутри себя основу, необходимую для развития статистической физики. Другими словами, имеются хорошие предпосылки для симбиоза представлений квантовой механики и статистики (в отличие от симбиоза классической механики со статистикой, который внутренне противоречив). С принципиальной точки зрения модели квантовой статистической физики должны быть, в сущности, моделями квантовой механики, в которых число частиц не обязательно мало. Таким образом, в соответствии с [3] естественно исходить из того, что квантовая механика содержит внутри себя принципиальную основу для обоснования статистической физики. В рамках современной версии больцмановской программы “сведения теории теплоты к механике (только обязательно квантовой)” в настоящей работе рассматривается простая (но многочастичная) модель, в которой состояние теплового равновесия выводится из первых квантово-механических принципов как результат измерения запутанного многочастичного состояния.

Представляется, что лучшее понимание явлений запутанности многочастичных квантовых систем имеет важное значение и для приложений. С точки зрения квантовой информатики явление, изучаемое в настоящей работе, представляет собой эффективный "нагрев" системы при ее измерении. Такого рода процесс (если он является неконтролируемым) приводит к декогерентизации состояния квантовой информационной системы и, как следствие, к снижению ее качества.

Работа состоит из двух частей. В первой части мы сконструируем многочастичные запутанные состояния ЭПР-типа и изучим их статистические свойства. Во второй части мы представим основанную на системе осцилляторов физическую модель, в которой такого рода состояния могут возникать.

МНОГЧАСТИЧНЫЕ СОСТОЯНИЯ ЭПР-ТИПА

Основной задачей настоящего раздела является построение $(r + 1)$ -частичных состояний, имеющих следующую структуру:

$$\Psi(x_1, \dots, x_{r+1}) = \sum_{n_1, \dots, n_r=0}^{\infty} c_{n_1, \dots, n_r} \Psi_{n_1}^{(1)}(x_1) \dots \Psi_{n_r}^{(r)}(x_r) \Psi_{n_1 + \dots + n_r}^{(r+1)}(x_{r+1}). \quad (1)$$

Указанные состояния являются состояниями ЭПР-типа. При этом одна из частиц $((r + 1)$ -я) является выделенной. Результаты измерения r частиц позволяют однозначно предсказать состояние $(r + 1)$ -й частицы (номер ее состояния равен сумме номеров состояний остальных частиц). Если же неизмеренной оказывается не $(r + 1)$ -я, а какая-либо другая частица, то для определения ее состояния нужно из номера состояния $(r + 1)$ -й частицы вычесть сумму номеров состояний всех остальных частиц. В частном случае, когда мы измеряем только выделенную $((r + 1)$ -ю) частицу и она оказывается в основном состоянии, то, не проводя дальнейших измерений, можно сделать вывод, что и все остальные частицы будут находиться в основном состоянии.

Введем r действительных параметров f_1, f_2, \dots, f_r . Тогда каждой точке внутри гипершара единичного радиуса ($f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_r^2 < 1$) можно сопоставить некоторое квантовое состояние, как это описано ниже.

Пусть $f^2 = f_1^2 + f_2^2 + \dots + f_r^2$ – квадрат длины вектора параметров. Тогда коэффициенты разложения и их квадраты (веса) будут следующими:

$$c_{n_1, n_2, \dots, n_r} = (f_1)^{n_1} (f_2)^{n_2} \dots (f_r)^{n_r} \times \sqrt{(1 - f^2) \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_r)!}{n_1! n_2! \dots n_r!}}, \quad (2)$$

$$\lambda_{n_1, n_2, \dots, n_r} = (c_{n_1, n_2, \dots, n_r})^2 = (1 - f^2) (f_1^2)^{n_1} (f_2^2)^{n_2} \dots (f_r^2)^{n_r} \frac{(n_1 + n_2 + \dots + n_r)!}{n_1! n_2! \dots n_r!}. \quad (3)$$

Введенные весовые коэффициенты удовлетворяют условию нормировки

$$\sum_{n_1, n_2, \dots, n_r=0}^{\infty} \lambda_{n_1, n_2, \dots, n_r} = 1. \quad (4)$$

Для простоты обозначений мы предполагаем, что базисные состояния всех $(r + 1)$ -частиц имеют один и тот же простейший вид осцилляторных базисных функций:

$$\Psi_k^{(j)}(x_j) = [1/(2^k k! \sqrt{\pi})]^{1/2} |H_k(x_j) \exp(-x_j^2/2), \quad (5)$$

$$j = 1, 2, \dots, r + 1, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Путем введения масштабных множителей рассматриваемые базисные функции могут быть очевидным образом обобщены.

Воспользуемся формулой сложения для полиномов Эрмита [10]

$$\frac{\left(\sum_{k=1}^r f_k^2\right)^{n/2}}{n!} H_n\left(\sum_{k=1}^r f_k x_k / \sqrt{\sum_{k=1}^r f_k^2}\right) = \sum_{n_1 + n_2 + \dots + n_r = n} \prod_{k=1}^r \left\{ \frac{f_k^{n_k}}{n_k!} H_{n_k}(x_k) \right\}. \quad (6)$$

Умножим обе части равенства на $H_n(x_{r+1})$ и просуммируем по n с использованием следующей формулы [11]:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k H_k(y) H_k(z)}{2^k k!} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \exp\left[\frac{2xyz - (y^2 + z^2)x^2}{1 - x^2}\right]. \quad (7)$$

Добавим также необходимые нормировочные и экспоненциальные множители для превращения полиномов Эрмита в базисные функции осцилляторов. Тогда в результате можно получить следующее разложение Шмидта:

$$\left[\sum_{n_1, \dots, n_r=0}^{\infty} c_{n_1, \dots, n_r} \Psi_{n_1}^{(1)}(x_1) \dots \Psi_{n_r}^{(r)}(x_r) \Psi_{n_1 + \dots + n_r}^{(r+1)}(x_{r+1}) \right]^2 = \frac{1}{(\sqrt{\pi})^{r+1}} \exp\left(-\sum_{i,j=1}^{r+1} A_{ij} x_i x_j\right). \quad (8)$$

Возникшее справа выражение есть плотность $(r + 1)$ -мерного гауссова распределения.

Элементы матрицы A задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \delta_{ij} + 2f_i f_j / (1 - f^2), \quad i, j = 1, 2, \dots, r, \\ A_{i, r+1} &= A_{r+1, i} = -2f_i / (1 - f^2), \\ i &= 1, 2, \dots, r, \quad A_{r+1, r+1} = (1 + f^2) / (1 - f^2). \end{aligned} \quad (9)$$

Заметим, что $\det A = 1$.

Справедливость представленной выше общей формулы (8) для разложения Шмидта подтверждена нами также и численно для частных случаев двух-, трех- и четырехмерных гауссовых распределений.

Матрица A является положительно определенной. Из $r + 1$ собственных значений этой матрицы $r - 1$ значение равно единице. Остальные два, соответствующие максимальному и минимальному собственным значениям, есть

$$\begin{aligned} \lambda_{\max} &= (1 + \sqrt{f^2})^2 / (1 - f^2), \\ \lambda_{\min} &= (1 - \sqrt{f^2})^2 / (1 - f^2). \end{aligned} \quad (10)$$

Указанные собственные значения, очевидно, удовлетворяют соотношению $\lambda_{\min} \lambda_{\max} = 1$.

Рассмотрим ортонормированные собственные векторы матрицы A , описывающие нормальные колебания системы. Собственному значению λ_{\max} соответствует собственный вектор с компонентами

$$\begin{aligned} a_i^{\max} &= -f_i / \sqrt{2f^2}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ a_{r+1}^{\max} &= 1 / \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (11)$$

Аналогично собственному значению λ_{\min} соответствует собственный вектор, отличающийся от первого знаком в r первых компонентах:

$$\begin{aligned} a_i^{\min} &= f_i / \sqrt{2f^2}, \quad i = 1, 2, \dots, r, \\ a_{r+1}^{\min} &= 1 / \sqrt{2}. \end{aligned} \quad (12)$$

Остальные $r - 1$ собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному значению, равному единице ($\lambda = 1$), строятся следующим образом. У всех них $(r + 1)$ -я компонента равна нулю ($a_{r+1} = 0$). Первые r компонент каждого из этих

векторов составляют вектор, ортогональный вектору \mathbf{f} . Все вместе эти $r - 1$ векторов образуют базис подпространства, являющегося ортогональным дополнением к вектору \mathbf{f} .

Таким образом, только два из $r + 1$ нормальных колебаний системы затрагивают выделенную $(r + 1)$ -ю частицу. Эти колебания отвечают собственным значениям λ_{\max} и λ_{\min} матрицы A . Все остальные движения происходят строго внутри r -частичной системы, образованной первыми r осцилляторами.

Матрица A может быть представлена в виде

$$A = V D V^+, \quad (13)$$

где D – диагональная матрица собственных значений, V – унитарная матрица, столбцы которой есть собственные векторы. Численные расчеты подтверждают справедливость представленных выше аналитических результатов для собственных векторов и собственных значений матрицы A .

Матрица ковариаций пропорциональна матрице A^{-1} :

$$\Sigma = (1/2) A^{-1}. \quad (14)$$

Проанализируем вероятностную структуру весов состояний в разложении Шмидта. Проведем измерение выделенной $(r + 1)$ -й частицы. Рассматриваемая частица является измерителем суммарной энергии остальных r частиц. Пусть указанная частица оказалась в состоянии n . Вероятность этого события есть

$$P_n = (1 - f^2)(f^2)^n. \quad (15)$$

Полученные вероятности P_n удовлетворяют условию нормировки

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n = 1. \quad (16)$$

Вероятности P_n образуют геометрическую прогрессию совершенно аналогично состоянию теплового равновесия гармонического осциллятора. Соответствующая эффективная температура находится из условия

$$\exp(-\hbar\omega/\theta) = f^2. \quad (17)$$

Из этого равенства получаем выражение для температуры:

$$\theta = -\hbar\omega / \ln(f^2). \quad (18)$$

Заметим, что полученное распределение $P(n) = g^n(1 - g)$ (здесь $g = f^2 = \exp(-\hbar\omega/\theta)$) является геометрическим. Его среднее значение описывается формулой Планка

$$\begin{aligned} \bar{n} &= \bar{n}_1 + \bar{n}_2 + \dots + \bar{n}_r = g / (1 - g) = \\ &= 1 / |\exp(\hbar\omega/\theta) - 1|. \end{aligned} \quad (19)$$

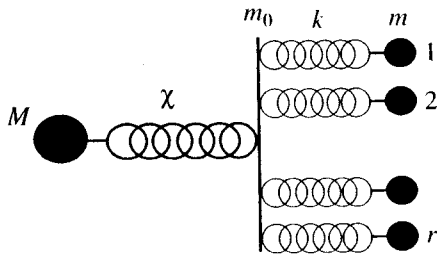


Рис. 1. Система осцилляторов, связанных друг с другом посредством перегородки; k, m – жесткость и масса осцилляторов с номерами $j = 1, 2, \dots, r$; χ, M – жесткость и масса $(r + 1)$ -го осциллятора, m_0 – масса перегородки.

В результате измерения микродатчик $((r + 1)$ -я частица) оказывается в состоянии n , а исходный вектор состояния редуцируется к состоянию, в котором

$$n_1 + n_2 + \dots + n_r = n. \quad (20)$$

Таким образом, измерение выделенной $(r + 1)$ -й частицы определяет суммарную энергию остальных r частиц. Дальнейшее измерение оставшегося r -частичного квантового состояния приводит нас к полиномиальному распределению

$$P(|n_1\rangle, |n_2\rangle, \dots, |n_r\rangle) = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \dots p_r^{n_r} \frac{n!}{n_1! n_2! \dots n_r!}, \quad (21)$$

где $p_1 = f_1^2/f^2, p_2 = f_2^2/f^2, \dots, p_r = f_r^2/f^2$. Очевидно, $p_1 + p_2 + \dots + p_r = 1$. Полученное распределение задает вероятность того, что первая частица окажется в состоянии $|n_1\rangle$, вторая в состоянии $|n_2\rangle$, и т.д. (при условии, что суммарная энергия возбуждения r -частичной системы равна $\hbar\omega(n_1 + n_2 + \dots + n_r) = \hbar\omega n$).

Рассмотрим теперь всю возможную совокупность результатов измерений, когда n не является фиксированным, а описывается полученным тепловым распределением (15). Тогда методом производящих функций можно получить многомерное распределение чисел заполнения в системе r осцилляторов, которое будет в точности соответствовать условиям термодинамического равновесия. Совместное распределение состояний r частиц будет задаваться формулой

$$P(k_1, k_2, \dots, k_r) = (1 - g) \frac{(k_1 + k_2 + \dots + k_r)!}{k_1! k_2! \dots k_r!} \times p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_r^{k_r}, \quad (22)$$

где $g = \exp(-\hbar\omega/\theta)$.

Для произвольного отдельного j -го осциллятора распределение вероятностей $P_j(k)$ различных

энергетических состояний также задается геометрическим распределением

$$P_j(k) = \pi_j (1 - \pi_j)^k, \quad (23)$$

где $\pi_j = (1 - g)/(1 - gq_j), q_j = 1 - p_j, k = 0, 1, \dots$

Среднее значение рассматриваемой случайной величины есть

$$M(k) = \bar{n}_j = p_j / [\exp(\hbar\omega/\theta) - 1]. \quad (24)$$

Аналогично средняя энергия возбуждения осциллятора будет

$$\bar{\epsilon}_j = \hbar\omega \bar{n}_j = \hbar\omega p_j / [\exp(\hbar\omega/\theta) - 1]. \quad (25)$$

Последние два выражения соответствуют формуле Планка. Здесь каждому осциллятору мы приписали некоторую вероятность (вес) p_j (в простейшем случае все веса могут быть одинаковыми).

ФИЗИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим физическую модель, в рамках которой могут быть реализованы представленные выше запутанные состояния ЭПР. Пусть r осцилляторов крепятся на перегородке, как это показано на рис. 1. В силу конечной массы у перегородки осцилляторы оказываются связанными между собой. Кроме того, с “внешней” стороны к системе может быть прикреплен еще один $((r + 1)$ -й) осциллятор, который служит измерителем для системы в целом.

Вначале решим классическую задачу о нормальных колебаниях рассматриваемой системы. Мы увидим, что существуют только два нормальных колебания, в которые вовлечена $(r + 1)$ -я частица. Эти колебания при квантовом рассмотрении системы будут описывать запутывание r -частичной системы с $(r + 1)$ -й частицей (измерителем). Затем рассмотрим основное (вакуумное) квантовое состояние. Этому состоянию будут соответствовать базисные наборы Шмидта, описанные выше. При измерении вакуумного состояния в базисе Шмидта автоматически возникают распределения статистической физики (в частности, распределение Планка).

Для рассмотрения классических колебаний системы построим ее функцию Лагранжа. Пусть x_0 – координата перегородки, $z_1, z_2, \dots, z_r, z_{r+1}$ – растяжения соответствующих пружин (считаем, что в состоянии равновесия растяжение пружин равно нулю). Тогда координаты осцилляторов есть

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + z_1, & x_2 &= x_0 + z_2, & \dots, & x_r &= x_0 + z_r, \\ x_{r+1} &= x_0 - z_{r+1}. \end{aligned} \quad (26)$$

Знак минус в последнем равенстве обусловлен тем, что для $(r + 1)$ -й частицы растяжение пружины приводит к уменьшению ее координаты.

Функция Лагранжа системы есть

$$L = m_0 \dot{x}_0^2/2 + \sum_{i=1}^r m(\dot{x}_0 + \dot{z}_i)^2/2 + M(\dot{x}_0 - \dot{z}_{r+1})^2/2 - \sum_{i=1}^r k z_i^2/2 - \chi z_{r+1}^2/2. \quad (27)$$

Уравнение Лагранжа относительно \dot{x}_0 (движение перегородки) приводит к инерциальному движению системы как целого (закон сохранения импульса):

$$m \sum_{i=1}^r \dot{z}_i - M \dot{z}_{r+1} + (M + rm + m_0) \dot{x}_0 = P_0 = \text{const} \quad (28)$$

Остальные $r + 1$ уравнений Лагранжа есть

$$m \ddot{z}_i - \frac{m^2}{M + rm + m_0} \sum_{j=1}^r \ddot{z}_j + \frac{mM}{M + rm + m_0} \ddot{z}_{r+1} = -k z_i, \quad i = 1, 2, \dots, r, \quad (29)$$

$$\frac{M(rm + m_0)}{M + rm + m_0} \ddot{z}_{r+1} + \frac{Mm}{M + rm + m_0} \sum_{j=1}^r \ddot{z}_j = -\chi z_{r+1}. \quad (30)$$

Введем безразмерный параметр, пропорциональный квадрату частоты,

$$\lambda = \omega^2 m/k.$$

Нормальные колебания системы будем характеризовать собственными значениями этого параметра:

$$\lambda_j = \omega_j^2 m/k, \quad j = 1, 2, \dots, r, r + 1. \quad (31)$$

Два значения параметра λ , характеризующие связанные колебания системы и измерителя, являются решением следующего квадратного уравнения:

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0, \quad (32)$$

где

$$a = (rm + m_0)/m - Mr/(M + m_0), \quad (33)$$

$$b = -(M + rm + m_0) \times [\chi/kM + (rm + m_0)/m(M + m_0)], \quad (34)$$

$$c = (\chi/k)(M + rm + m_0)^2/M(M + m_0). \quad (35)$$

Корни этого квадратного уравнения, очевидно, есть

$$\lambda_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac})/2a. \quad (36)$$

Рассматриваемые два нормальных колебания имеют очень простую структуру – все r первых частиц имеют одинаковое смещение $z_1 = z_2 = \dots = z_r$, а $(r + 1)$ -я частица имеет смещение

$$z_{r+1}^{(1,2)} = [(M + rm + m_0)/\lambda_{1,2} - (M + m_0)] z_1^{(1,2)}/M. \quad (37)$$

Остальные $r - 1$ значения параметра λ тождественно равны единице:

$$\lambda_j = 1, \quad j = 3, 4, \dots, r + 1.$$

Из приведенных выше результатов нетрудно видеть, что в случае бесконечно тяжелой перегородки ($m_0 \rightarrow \infty$) мы имеем независимые колебания осцилляторов с массами m и M соответственно. В этом случае

$$\lambda_1 = \omega_1^2 m/k = 1,$$

следовательно, $\omega_1^2 = k/m$ – колебания осциллятора массой m ,

$$\lambda_2 = \omega_2^2 m/k = \chi m/kM,$$

следовательно, $\omega_2^2 = \chi/M$ – колебания осциллятора массой M .

В другом предельном случае, когда связь измерителя с системой мала ($\chi \rightarrow 0$), имеем

$$\lambda_1 = \omega_1^2 m/k = 1 + rm/m_0, \quad (38)$$

$$\lambda_2 = \omega_2^2 m/k = 0.$$

Как видно, частоты системы в данном случае не зависят от массы измерителя M . В этом случае r -частичная система и перегородка образуют запутанное состояние, при измерении которого возникает статистическое распределение, соответствующее состоянию теплового равновесия. Соответствующая температура дается формулой (18),

$$\theta = \hbar\omega/\ln \left(\frac{(1 + \xi)^{3/2} + 1}{(1 + \xi)^{3/2} - 1} \right),$$

где

$$\xi = rm/m_0. \quad (39)$$

Рассматриваемая зависимость иллюстрируется на рис. 2, на котором представлены температура и энергия возбуждения как функции от отношения массы перегородки к массе системы. Область, в которой рассматриваемые кривые



Рис. 2. Иллюстрация зависимости температуры (1) и энергии возбуждения (2) от отношения массы перегородки к массе системы.

близки, может рассматриваться как классическая. Она соответствует низким значениям массы перегородки и отвечает высоким температурам. При более низких температурах происходит “вымораживание” рассматриваемых колебательных степеней свободы, в результате кривая энергии возбуждения оказывается ниже кривой температуры. Заметим, что чем выше масса перегородки, тем более “квантовыми” становятся наблюдаемые распределения вероятностей (при бесконечно большой массе перегородки частицы системы перестают с ней запутываться, что соответствует температуре, равной нулю).

Принципиальная важность полученного результата заключается в том, что температура в нашей модели оказывается внутренним физическим свойством системы, которое может быть явно рассчитано, в том числе для систем с большим числом степеней свободы (до сих пор эта величина вводилась только феноменологическим путем).

Характеристическая температура системы θ_0 , аналогичная температурам Эйнштейна и Дебая в физике твердого тела, может быть получена при условии $\xi = rm/m_0 \approx 1$ (когда “перегородкой” для осцилляторов служат они сами, вместе взятые). В этом случае $\theta_0 = 1.3532\hbar\omega$. Заметим, что в целом рассматриваемая нами модель приводит к результатам, аналогичным теории теплоемкости твердого тела Эйнштейна (все осцилляторы имеют одинаковую собственную частоту). Развитие модели, более полно отражающее аналогию с моделью Дебая, может стать предметом дальнейших исследований.

Параметры измерителя (массу и жесткость $(r + 1)$ -го осциллятора) всегда можно подобрать такими, чтобы соответствующее вакуумное состояние системы из $r + 1$ частицы было состоянием ЭПР

рассматриваемого здесь типа (1). В этом случае при измерении выполняется условие $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$ (номер состояния измерителя равен сумме чисел заполнения осцилляторов измеряемой r -частичной системы).

Качественно связь между запутанностью и температурой можно представить следующим образом. Рассмотрим многочастичную систему при нулевой температуре (все нормальные осцилляторы находятся в основном состоянии). Если теперь перейти от рассмотрения нормальных к исходным физическим осцилляторам, то их измерение, как показано выше, приведет к температуре порядка характеристической температуры системы. Таким образом, измерение (взаимодействие с окружением) приводит к “оживлению” системы. Будучи предоставленной самой себе, замкнутая “оживленная” система снова со временем релаксирует в основное состояние (к нулевой температуре). Если система не замкнута, а взаимодействует непрерывно с окружением (термостатом), то ее температура будет определяться интенсивностью этого взаимодействия. При интенсивном взаимодействии с окружением (когда за время между последовательными измерениями осцилляторы не успевают релаксировать к равновесному состоянию) возникают более высокие температуры и система является более “классической”. В противоположном случае, когда интенсивность взаимодействия с окружением мала, система близка к основному состоянию (низкие температуры).

Для описания собственных колебаний системы можно ввести операторы (матрицы) для массы и жесткости. Элементы массовой матрицы рассчитываются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \hat{\mu}_{ii} &= m[1 - m/(M + rm + m_0)], \quad i = 1, \dots, r, \\ \hat{\mu}_{ij} &= -m^2/(M + rm + m_0), \\ & i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, r, \\ \hat{\mu}_{i,r+1} &= \hat{\mu}_{r+1,i} = Mm/(M + rm + m_0), \\ & i = 1, \dots, r, \\ \hat{\mu}_{r+1,r+1} &= M(rm + m_0)/(M + rm + m_0). \end{aligned} \quad (40)$$

Матрица жесткости в нашем случае является диагональной, т.е.

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}_{ii} &= k, \quad i = 1, \dots, r, \\ \hat{\kappa}_{r+1,r+1} &= \chi, \\ \hat{\kappa}_{ij} &= 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, \dots, r + 1. \end{aligned} \quad (41)$$

Обе введенные матрицы являются симметричными и положительно определенными.

Собственные частоты системы и соответствующие им нормальные колебания являются решением следующей задачи на нахождение обобщен-

ных собственных функций и собственных значений [12]:

$$\omega_s^2 \hat{\mu} z_s = \hat{\kappa} z_s, \quad s = 1, \dots, r+1. \quad (42)$$

Здесь ω_s и z_s – частота и амплитудный вектор s -го нормального колебания.

Решение задачи на нахождение обобщенных собственных функций и собственных значений сводится к нахождению таких матриц V_1 и D_1 , что

$$\hat{\kappa} V_1 = \hat{\mu} V_1 D_1. \quad (43)$$

Здесь D_1 – диагональная матрица собственных значений, а столбцы матрицы V_1 есть собственные векторы. С помощью введенных матриц можно получить матрицу A , определяющую гауссово распределение (8), соответствующее вакуумному состоянию,

$$A = V_1 \sqrt{D_1} V_1^+. \quad (44)$$

Нормальные колебания оказываются ортогональными друг другу. Условие ортогональности приводит к следующим двум соотношениям [12]:

$$\begin{aligned} z_s^+ \hat{\mu} z_j &= 0, & z_s^+ \hat{\kappa} z_j &= 0, \\ s &\neq j, & s, j &= 1, \dots, r+1. \end{aligned} \quad (45)$$

Нормальные колебания позволяют свести систему из $r+1$ связанных осцилляторов к системе из $r+1$ независимых осцилляторов. Масса и жесткость каждого такого нормального осциллятора есть

$$\mu_s = z_s^+ \hat{\mu} z_s, \quad \kappa_s = z_s^+ \hat{\kappa} z_s, \quad s = 1, \dots, r+1. \quad (46)$$

Численное решение рассматриваемой задачи подтверждает справедливость представленных выше аналитических результатов.

ВЫВОДЫ

Сформулируем основные результаты работы.

1. Построены многочастичные запутанные состояния ЭПР-типа, основанные на осцилляторных функциях. При этом одна из частиц-осцилляторов является выделенной. Эта частица может рассматриваться как измеритель суммарной энергии остальных частиц.

2. Показано, что термодинамическое равновесие может рассматриваться как следствие квантового запутывания вакуумного состояния системы. Важно отметить, что для описания термоди-

намических распределений мы не вводим никакого другого статистического механизма, кроме изначально имеющегося в постулатах квантовой механики.

3. Разработана и исследована явная физическая многочастичная квантовая модель, в которой запутанность возникает благодаря связи частиц-осцилляторов с единым посредником (перегородкой или стенкой). Предложенная модель позволяет вскрыть природу и механизм возникновения равновесных квантовых распределений. Возникающая в системе температура определяется отношением массы системы частиц к массе связанной с ними перегородки. Таким образом, впервые температура вводится не как феноменологическое свойство, а как физический параметр системы, поддающийся явному расчету.

4. Результаты проведенных аналитических исследований хорошо согласуются с результатами численных расчетов.

Работа поддержана грантом РФФИ (06-07-89129).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Больцман Л.* Избранные труды. М.: Наука, 1984. 590 с.
2. *Богданов А.Ю., Богданов Ю.И., Валиев К.А.* // Вестн. МГУ. Сер. 15. Выч. мат. и киберн. 2006; quant-ph/0512062.
3. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Часть 1. М.: Наука, 1995. 608 с.
4. *Богданов Ю.И.* // Опт. и спектр. 2004. Т. 96. № 5. С. 735–746.
5. *Менский М.Б.* Квантовые измерения и декогеренция. Модели и феноменология. М.: Физматлит, 2001. 232 с.
6. *Zee H.D.* // Seminaire Poincare. 2005. P. 115–129.
7. *Zurek W.H.* // Seminaire Poincare. 2005. P. 1–23.
8. *Валиев К.А., Кокин А.А.* Квантовые компьютеры: надежды и реальность. М.; Ижевск: РХД, 2004. 320 с.
9. *Богданов А.Ю., Богданов Ю.И., Валиев К.А.* // Микроэлектроника. 2006. Т. 35. № 1. С. 11–30.
10. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений М.: Физматгиз, 1963. 1100 с.
11. *Виленкин Н.Я.* Специальные функции и теория представления групп. М.: Наука, 1991. 576 с.
12. *Мигулин В.В., Медведев В.И., Мустель Е.Р., Парыгин В.Н.* Основы теории колебаний. М.: Наука, 1988. 392 с.